Adilson Cândido Mendonça de Barros

Teorema de Noether do Cálculo das Variações e Controlo Óptimo Estocásticos

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
2010

Adilson Cândido Mendonça de Barros

Teorema de Noether do Cálculo das Variações e Controlo Óptimo Estocásticos

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada à Engenharia, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Delfim Fernando Marado Torres, Professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, Portugal.

o júri / the jury

Presidente	**Domingos Moreira Cardoso** Professor Catedrático da Universidade de Aveiro, Portugal
Vogais	**Gastão Silves Ferreira Frederico** Professor Auxiliar da Universidade de Cabo Verde, Cabo Verde
	Delfim Fernando Marado Torres Professor Associado da Universidade de Aveiro, Portugal (orientador)

agradecimentos / acknowledgements

Ao meu orientador, o Professor Doutor Delfim Fernando Marado Torres, o meu profundo agradecimento por toda a atenção e todo o saber que colocou ao meu alcance.

Agradeço aos meus colegas da coordenação de Matemática pelo amável acolhimento que me dispensaram, incluindo o apoio humano.

Ao meu amigo Adilson Semedo e meus familiares, partircularmente a Orisa, um obrigado terno, pelo muito que representam nesta viagem.

Resumo

Neste trabalho começamos por apresentar os problemas clássicos do cálculo das variações e controlo óptimo determinísticos, dando ênfase às condições necessárias de optimalidade de Euler-Lagrange e Princípio do Máximo de Pontryagin (Capítulo 1). No Capítulo 2 demonstramos o Teorema de Noether do cálculo das variações e uma sua extensão ao controlo óptimo. Como exemplos de aplicação mencionamos as leis de conservação de momento e energia da mecânica, válidas ao longo das extremais de Euler-Lagrange ou das extremais de Pontryagin. Numa segunda parte do trabalho introduzimos o cálculo das variações estocástico (Capítulo 3) e demonstramos um teorema de Noether estocástico obtido recententemente por Jacky Cresson (Capítulo 4). O Capítulo 5 é dedicado à programação dinâmica: caso discreto e contínuo, caso determinístico e estocástico.

Palavras Chave

Cálculo das Variações, Controlo Óptimo, invariância, teoremas do tipo de Noether, leis de conservação, Cálculo das Variações Estocástico, Teorema de Noether Estocástico.

Abstract

In this master thesis we begin by presenting the classical deterministic problems of the calculus of variations and optimal control, with emphasis to the necessary optimality conditions of Euler-Lagrange and Pontryagin's Maximum Principle (Chapter 1). In Chapter 2 we prove the Noether's theorem of calculus of variations and an extension to optimal control. As examples of application we mention the conservation laws of momentum and energy, valid along the Euler-Lagrange or Pontryagin extremals. In the second part of the thesis we introduce the stochastic calculus of variations (Chapter 3) and we prove a recent stochastic Noether-type theorem obtained by Jacky Cresson (Chapter 4). The Chapter 5 is dedicated to dynamic programming: discrete-time and continuous cases, both deterministic and stochastic.

Keywords

Calculus of Variations, Optimal Control, invariance, Noether type theorems, Conservations laws, stochastic calculus of variations, stochastic Noether theorems.

A Minha Mãe e aos Meus Filhos (Syonn e Cândida)

Conteúdo

Introdução **3**

1 Cálculo das Variações e Controlo Óptimo **5**

1.1 Introdução 5

1.2 Cálculo das Variações 6

1.2.1 Caso Escalar 7

1.2.2 Problema fundamental vectorial: n variáveis dependentes 11

1.2.3 Problema com derivadas de ordem superior 11

1.3 Condição Suficiente de Jacobi 12

1.4 Controlo Óptimo 14

2 Teorema de Noether do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo **21**

2.1 Introdução 21

2.2 Teorema de Noether no Cálculo das Variações 22

2.3 Teorema de Noether no Controlo Óptimo 26

3 Cálculo das Variações Estocástico **29**

3.1 Introdução 29

3.2 Derivada estocástica de Nelson 29

3.3 Cálculo das Variações Estocástico 34

3.3.1 Funcional e Processo L-adaptado 34

3.3.2 Espaço Variacional 35

3.3.3 Função Diferenciável e Processo Crítico 36

3.3.4 Equação de Euler-Lagrange Estocástica 37

4 Teorema de Noether Estocástico **39**

5 Programação Dinâmica **43**
5.1 Introdução 43
5.2 Programação Dinâmica: caso discreto 43
5.2.1 Caso determinístico 44
5.2.2 Caso estocástico 45
5.3 Programação Dinâmica: caso contínuo 47
5.4 Integral de Itô 48
5.5 Controlo óptimo estocástico em tempo contínuo 50
5.5.1 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para um movimento Browniano de dimensão um 50
5.5.2 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para um movimento Browniano de dimensão m 51

Conclusão **57**

Referências Bibliográficas **59**

Índice Remissivo **63**

Introdução

O problema primeiramente colocado no cálculo das variações deve-se a Galileu, que pretendeu, em 1630, resolver a questão de determinar a trajectória óptima que minimizasse o tempo que uma partícula demora a percorrer entre dois pontos por acção exclusiva da gravidade. Algumas décadas mais tarde, este problema viria a ser formalizado pelos irmãos Bernoulli, Newton, Leibniz, Euler e Lagrange, quase imediatamente a seguir à invenção do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz.

Um importante problema que ocorre no cálculo é encontrar um argumento de uma função no qual ela toma um valor máximo ou minímo. O cálculo das variações é uma extensão deste problema, que consiste em encontrar uma função que maximize ou minimize o valor de um integral (chamado funcional) dessa função. Já no século XIX e princípio do século XX, muitos autores contribuíram para a teoria da solução de problemas do cálculo das variações. Entre outros, sobressaem os nomes de Weierstrass, Bliss e Bolza.

Então o problema no cálculo das variações tem como objectivo minimizar (ou maximizar) funcionais do tipo integral:

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to min^1,$$

onde

$$x : [a, b] \to \mathbb{R}^n,\ L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ e \ \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

O estudo continuado de problemas variacionais levou ao desenvolvimento da teoria do controlo óptimo. No controlo óptimo existem três, em vez de dois tipos de variáveis. Além do parâmetro de tempo e das variáveis de estado, consideramos também variáveis de controlo. Estas variáveis de controlo desempenham papel fundamental no método, pois são

[1] Este problema foi formulado como de minimização mas também pode ser formulado como um problema de maximização

os instrumentos de otimização: procuramos uma política de controlo óptima e encontramos, a partir de um estado inicial e desta política óptima, o caminho de estado óptimo correspondente. Assim, as variáveis de controlo ou acções de controlo, que chamaremos u, infuênciam directamente as variáveis de estado do problema, por isso, também são chamadas de variáveis de entrada do sistema. Matemáticamente, no caso de tempo contínuo, esta infuência dá-se por meio da equação de um sistema dinâmico contínuo no tempo (uma equação diferencial).

Esta equação, é chamada de equação de estado ou equação de movimento:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \tag{1}$$

O problema fundamental do controlo óptimo pode ser formulado como

$$J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), u(t))dt \to \min$$

onde

$$x(\cdot) \in PC^1([a, b], \mathbb{R}^n) \ e \ u(\cdot) \in PC([a, b], \Omega \subseteq \mathbb{R}^m),$$

sujeito ao sistema dinâmico de controlo (1).

Ainda que os contributos de Isaacs e Bellman (através da programação dinâmica) tenham sido importantes, o verdadeiro arranque deu-se com a publicação do livro "A Teoria Matemática de Processos Óptimos"(em Russo, em 1958, e em Inglês, em 1962) da autoria de Pontryangin, Boltyanski, Gamkrelidze e Mischenko. A importância deste livro reside não só na apresentação da formulação rigorosa do problema do cálculo das variações com variáveis de controlo (restritas), mas também na demonstração do Princípio do óptimo (de Pontryagin) para o problema de controlo óptimo.

Note que, assim como o cálculo variacional, o controlo óptimo está interessado em resolver o problema dinâmico usando as propriedades do conjunto admissível das variáveis de estado (e de controlo) para garantir a optimalidade da solução.

Deste então, o Cálculo das Variações repartiu-se por vários ramos. O cálculo foi crescendo e continua extremamente vivo, tendo inúmeras aplicações práticas: na mecânica, economia, ciências dos materiais, engenharia e física.

Foi da aplicação do Cálculo das Variações à Física que Emmy Noether chegou ao famoso Teorema de Noether, que estabelece uma relação entre a existência de simetrias dos problemas e a existência de leis de conservação. Como caso particular do Teorema de Noether podemos explicar todas as leis de conservação da Mecânica: conservação de energia, conservação de momento, etc.

A moderna teoria do controlo óptimo estocástico, à semelhança do Princípio do Máximo de Pontryagin e do Princípio de Bellman da Programação Dinâmica, nasceu em finais dos anos cinquenta do século XX [32]. Nesta tese estamos interessados em estudar problemas estocásticos do cálculo das variações e controlo óptimo e em particular obter uma formulação estocástica para o Teorema de Noether.

Capítulo 1

Cálculo das Variações e Controlo Óptimo

1.1 Introdução

O estudo de problemas do Cálculo das Variações é quase tão antigo quanto o Cálculo, tendo sido os dois assuntos desenvolvidos em paralelo. A ideia do Cálculo Variacional é um alicerce de muitas teorias em Física e tem um papel fundamental na formação nessa área bem como em Matemática. O objectivo é minimizar funcionais do tipo integral:

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \min\ (\max),$$

onde

$$x : [a, b] \to \mathbb{R}^n,\ L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ e } \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Serão apresentados exemplos de problemas clássicos, como o da Rainha Dido e o problema da Branquistócrona .

Problema 1 ***(Problema da Braquistócrona)***[1]*. A questão foi proposta por John Bernoulli em 1696, através da publicação de um artigo intitulado "Um problema ao qual os matemáticos são chamados".*
Dados dois pontos A e B num plano vertical, determinar o caminho de descida para um

[1]Foi resolvido por James Bernoulli, Newton, Leibniz, L'Hospital e o próprio John Bernoulli, em 1696-1697

corpo, sob a força única do seu próprio peso e na ausência de atrito, de a A a B em tempo mínimo.

Problema 2 *(Problema de Dido) A história é-nos contada pelo poeta Romano Virgílio, em 814 a.C. Depois do marido ter sido morto, Dido fugiu para a África Mediterrânica. Lá ela comprou, de um rei ingénuo, todo o terreno que pudesse ser incluído pela pele de um Boi.*

1.2 Cálculo das Variações

O problema fundamental do Cálculo das Variações consiste na determinação de uma função $x(\cdot)$ que minimiza a seguinte funcional integral:

$$\begin{gathered} J[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \\ x(a) = A, \ x(b) = B, \\ x(\cdot) \in C^2([a,b];\mathbb{R}^n) \end{gathered} \tag{1.1}$$

onde supomos $a < b$, $A, B \in \mathbb{R}^n$ e $L(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^2$ em relação a todos os argumentos.

O problema de minimizar a funcional em (1.1) é, via de regra, sujeito a diferentes tipos de restrições como:

- Impor condições a x nas extremidades do intervalo, i.e. $x(a) = A$, e ou $x(b) = B$;
- Exigir que $g(t, x(t), \dot{x}(t)) \equiv 0$ para $t \in [a,b]$, onde $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada;
- Exigir que $\int_a^b g(t, x(t), \dot{x}(t))dt = c$, onde $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$;

O primeiro tipo de restrição é denominado *condição de contorno* e pode ser exigido em ambos ou em apenas um dos extremos do intervalo $[a,b]$. O segundo tipo de restrição é denominado *restrição Lagrangeana*, devido à sua semelhança com as restrições presentes nos problemas da mecânica Lagrangeana. O terceiro tipo é denominado de *restrição isoperimétrica* (ou integral), uma vez que os primeiros problemas de interesse relacionados a esta restrição apresentavam a exigência dos candidatos x terem todos o mesmo comprimento/perímetro.

O intervalo $[a, b]$ não precisa ser necessariamente fixo. Este é o caso quando uma das condições de contorno é descrita pela curva de nível de uma função $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Temos assim uma restrição do tipo:

- $\sigma(T, x(T)) = 0,\ com\ T > a$

que é denominada *condição (de contorno) transversal*.

As restrições acima podem aparecer de forma combinada, de modo que um mesmo problema pode estar sujeito a restrições de diferentes tipos, ou a várias restrições do mesmo tipo. Analisamos neste capítulo apenas os problemas com condições de contorno.

Consideramos, por agora, o caso escalar (isto é $n = 1$).

1.2.1 Caso Escalar

Teorema 3 *(Condição necessária de optimalidade para o problema* (1.1) *— equação de Euler-Lagrange). Se $x(\cdot)$ é minimizante local do problema* (1.1)*, então $x(\cdot)$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange:*

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0. \tag{1.2}$$

Demonstração. (seguindo Lagrange) Seja $x(\cdot)$ minimizante local do problema (1.1). Considere-se uma função admissível, na vizinhança de $x(\cdot)$, arbitrária. Tal função pode ser escrita na forma $x(\cdot) + \varepsilon\phi(\cdot)$, com $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Por definição de minimizante, a função

$$\Phi(\varepsilon) = J[x(\cdot) + \varepsilon\phi(\cdot)] = \int_a^b L\big(t, x(t) + \varepsilon\phi(t), \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\phi}(t)\big)dt$$

tem mínimo para $\varepsilon = 0$, para qualquer $\phi(\cdot)$. Como a funcional J tem um mínimo local em $x(\cdot)$ e $x(a) + \varepsilon\phi(a) = A$ e $x(b) + \varepsilon\phi(b) = B$, então $\Phi(\varepsilon)$ tem mínimo no ponto $\varepsilon = 0$. Logo

$$0 = \Phi'(0) = \int_a^b \big(\bar{L}_x(t)\phi(t) + \bar{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\phi}(t)\big)dt$$

onde $\bar{L}_x = L(t, x(t), \dot{x}(t))$ e $\bar{L}_{\dot{x}} = L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$. Integrando o segundo membro por partes, vem

$$\int_a^b \bar{L}_{\dot{x}}\dot{\phi}(t)dt = \bar{L}_{\dot{x}}\phi(t)\ \big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t)\phi(t) = -\int_a^b \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t)\phi(t)$$

e então

$$0 = \Phi'(0) = \int_a^b \big(\bar{L}_x(t)\phi(t) + \bar{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\phi}(t)\big)dt = \int_a^b \Big(\bar{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t)\Big)\phi(t)dt. \tag{1.3}$$

Utilizamos agora o seguinte lema auxiliar.

Lema 4 *(Lema fundamental do cálculo das variações)*[2] *Se $g(\cdot)$ for contínua em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b g(x)\phi(x)dx = 0 \tag{1.4}$$

para todas as funções $\phi \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ com $\phi(a) = \phi(b) = 0$, então $g(x) = 0$.
De (1.3) resulta do Lema 4 que

$$\bar{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t) = 0 \tag{1.5}$$

■

Definição 5 *As soluções da equação diferencial de Euler-Lagrange* (1.2) *(desconsiderando as condições de contorno) são denominadas* função estacionárias *ou* extremais*, independente do facto de serem ou não soluções do problema variacional.*

Vamos abordar alguns exemplos clássicos do Cálculo das Variações.

Problema 6 *(um problema autónomo) O problema consiste em determinar a extremal de Euler-Lagrange $\tilde{x}(\cdot)$ associada à funcional*

$$J[x(\cdot)] = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2 - 2x)dt \tag{1.6}$$

quando sujeita às condições de contorno,

$$x(0) = 1,\ x(1) = 0. \tag{1.7}$$

Neste caso

$$L(t, x(t), \dot{x}(t)) = x^2(t) + \dot{x}^2(t) - 2x(t),$$

logo $L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 2x(t) - 2$, $L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 2\dot{x}(t)$. A equação de Euler-Lagrange toma a forma

$$\frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 2x - 2 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) - x(t) + 1 = 0$$

que é uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes sujeita às condições de contorno (1.7). Obtemos a extremal

$$\tilde{x}(t) = 1 - \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}. \tag{1.8}$$

[2] A demonstração pode ser vista, por exemplo, em [8].

Nota 7 *Convém realçar que a solução da equação de Euler-Lagrange é apenas uma extremal: um candidato a minimizante. Apenas uma análise suplementar pode determinar se as extremais são, ou não, solução do problema.*

Vamos mostrar que a extremal (1.8) é solução do problema (1.6)-(1.7).

Qualquer função admissível $x(\cdot)$ pode ser escrita na forma $x(t) = \tilde{x}(t) + \varphi(t)$, $t \in [0, 1]$, com $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.
Temos

$$J[\tilde{x}(\cdot) + \varphi(\cdot)] - J[\tilde{x}(\cdot)] = 2\int_0^1 (\tilde{x}(t)\varphi(t) + \dot{\tilde{x}}(t)\dot{\varphi}(t) - \varphi(t))dt + \int_0^1 (\varphi^2(t) + \dot{\varphi}^2(t))dt$$

e tendo em conta que $\tilde{x}(t) = 1 - \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}$ então

$$2\int_0^1 (\tilde{x}(t)\varphi(t) + \dot{\tilde{x}}(t)\dot{\varphi}(t) - \varphi(t))dt = -2\int_0^1 \frac{d}{dt}\big(\varphi(t)\frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}\big)dt = -2\varphi(t)\frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}} \mid_0^1 = 0.$$

Vem que $J[\tilde{x}(t) + \varphi(t)] - J[\tilde{x}(t)] = \int_0^1 (\varphi^2(t) + \dot{\varphi}^2(t))dt > 0$.

□

Problema 8 *Considere-se a funcional integral*

$$J[x(\cdot)] = \int_0^\pi (\dot{x}^2(t) - kx^2(t))dt \tag{1.9}$$

sob as condições de contorno $x(0) = x(\pi) = 0$, onde k é uma constante positiva. Assumimos aqui também que as funções pertencem à classe C^2.

Se $x(\cdot)$ é uma extremal da funcional integral (1.9), então resulta de (1.2) que

$$\frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) + 2kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária homogénea de coeficientes constantes cuja solução é

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{k}\pi\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{k}\pi\right)$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes de integração.

As condições de fronteira $x(0) = x(\pi) = 0$ implicam que $C_1 = 0$ e $C_2 \sin\left(\sqrt{k}\pi\right) = 0$. Vamos ter dois casos

Caso 1:

Se $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$, então $\sin\left(\sqrt{k}\pi\right) = 0,\ \forall C_2$. Neste caso temos uma infinidade de extremais da forma

$$x(t) = C_2 \sin\left(\sqrt{k}\pi\right).$$

Caso 2

Se $\sqrt{k}$ não for inteiro, então $C_2 = 0$, e a única extremal é $x(t) = 0, \forall t \in [0, \pi]$

Problema 9 *Analisamos o problema de encontrar, dados dois pontos* (t_0, x_0) *e* (t_1, x_1) *no plano, a curva de menor comprimento que os une.*

Representamos as curvas admissíveis como parametrizações do tipo

$$x : [t_0, t_1] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}; x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

supondo as curvas admissíveis continuamente diferenciáveis. Obtemos o comprimento de uma curva $x(\cdot)$ pela expressão

$$J[x(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt.$$

Logo, o problema variacional pode ser formulado como:

$$\begin{cases} Minimizar J[x(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\ sujeito\ a \\ x \in \{C^1[t_0, t_1] \mid x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\} \end{cases}$$

com $L(t, x, \dot{x}) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$. Da equação de Euler-Lagrange obtemos

$$0 = L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = 0 - \frac{d}{dt}\Big[\frac{\dot{x}}{(1 + \dot{x}^2)^{1/2}}\Big].$$

Portanto

$$\frac{\dot{x}}{(1 + \dot{x}^2)^{1/2}} = const,$$

o que implica que $\dot{x}$ é constante, ou seja, x é linear.

A extremal do problema é então

$$x(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0).$$

1.2.2 Problema fundamental vectorial: n variáveis dependentes

Vamos agora considerar o problema em que as funções admissíveis $x(\cdot)$ são vectoriais: $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$.

Escrevemos o Lagrangeano como anteriormente, $L(t, x(t), \dot{x}(t))$, mas agora com o significado $L(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), ..., \dot{x}_n(t))$. Temos então o problema:

$$\begin{gathered} L[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \min \\ x(a) = x_a, x(b) = x_b, \\ x(\cdot) \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^n). \end{gathered} \tag{1.10}$$

Os valores de contorno $x_a = (x_{a_1}, x_{a_2}, ..., x_{a_n}), x_b = (x_{b_1}, x_{b_2}, ..., x_{b_n})$, são dados.

Teorema 10 *(Condição necessária de optimalidade para o problema* (1.10) *— equação de Euler-Lagrange) Se $x(\cdot)$ é minimizante local do problema* (1.10)*, então $x(\cdot)$ satisfaz as equações de Euler-Lagrange*

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0. \tag{1.11}$$

Nota 11 *A equação diferencial vectorial* (1.11) *pode ser escrita na forma*

$$\begin{cases} L_{x_1} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} = 0 \\ \vdots \\ L_{x_n} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_n} = 0 \end{cases}$$

1.2.3 Problema com derivadas de ordem superior

Consideremos agora o problema do Cálculo das Variações com derivadas de ordem superior:

$$\begin{gathered} L_m[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), ..., x^{(m)}(t))dt \to extr \\ x^{(i)}(a) = y_a^i,\ x^{(i)}(b) = y_b^i,\ i = 0, ...m - 1, \\ x(\cdot) \in C^{2m}([a, b]; \mathbb{R}^n), \end{gathered} \tag{1.12}$$

onde $x^{(0)}(t) = x(t)$ e supomos o Lagrangeano suficientemente suave: $L \in C^{m+1}$ em relação a todos os argumentos de L.

Teorema 12 *(Condição necessária de optimalidade para o problema* (1.12) *— equação de Euler-Lagrange) Se* $x(\cdot)$ *é minimizante local do problema do problema* (1.12)*, então* $x(\cdot)$ *satisfaz a equação de Euler-Lagrange de ordem superior:*[3]

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(m)}(t)) - \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} L_{x^{(k)}}(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(m)}(t)) = 0. \tag{1.13}$$

1.3 Condição Suficiente de Jacobi

A obtenção das extremais não nos garante a solução do problema. Conhecidas as extremais, vamos recorrer à condição suficiente de Jacobi para verificar se a extremal é, de facto, a solução do problema.

Lema 13 *(ver [33]) Se* $x(\cdot)$ *é minimizante (maximizante) do problema fundamental do Cálculo das Variações* (1.12)*, então*

$$I[\varphi(\cdot)] = \int_a^b \left[\Big(L_{xx}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\Big)\varphi^2(t) + L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))(\dot{\varphi})^2(t)\right] dt \geq 0 \tag{1.14}$$

(respectivamente $I[\varphi(\cdot)] \leq 0$*) para todo o* $\varphi(\cdot) \in C_0^2([a, b]; \Re)$*.*

Demonstração (ver [33]).

Com a notação

$$P(x) = L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)),\ Q(x) = L_{xx}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

podemos escrever a funcional $I[\varphi(\cdot)]$ (1.14) da seguinte maneira:

$$\begin{gathered} I[\varphi(\cdot)] = \int_a^b [P(t)\dot{\varphi}(t)^2 + Q(t)\varphi(t)^2]dt \\ \varphi(a) = 0,\ \varphi(b) = 0, \\ \varphi(\cdot) \in C^2([a, b]; \mathbb{R}). \end{gathered} \tag{1.15}$$

A ideia de Jacobi foi estudar a funcional $I[\cdot]$ usando as próprias ferramentas do Cálculo das Variações. A equação de Euler-Lagrange de (1.15) conduz-nos à chamada equação de Jacobi:

$$\frac{d}{dt}\big(2P(t)\dot{\varphi}(t)\big) = 2Q(t)\varphi(t) \Leftrightarrow P(t)\ddot{\varphi}(t) + \dot{P}(t) - Q(t)\varphi(t) = 0. \tag{1.16}$$

[3]Equação diferencial ordinária de ordem $2m$, às vezes designada de equação de Euler-Poisson.

Nota 14 *A equação de Jacobi* (1.16) *tem a solução trivial* $\varphi(t) = 0$.

Definição 15 *Se existir uma solução não-trivial* $\varphi(\cdot)$ *(i.é.,* $\varphi(\cdot)$ *diferente da função nula) para a equação de Jacobi* (1.16) *que satisfaz* $\varphi(a) = \varphi(k) = 0$, $a < k < b$, *então* k *diz-se um ponto conjugado.*

Jacobi demonstrou a seguinte condição suficiente:

Teorema 16 *(Condição suficiente de Jacobi). Se*

1. $x(\cdot)$ *satisfaz a equação de Euler-Lagrange;*

2. $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) > 0$ $\forall t \in [a, b]$ *(condição de Legendre fortalecida);*

3. $[a, b]$ *não contém pontos conjugados;*

então $x(\cdot)$ *é minimizante do problema fundamental do Cálculo das Variações* (1.1).

Problema 17 *Determine o minimizante para o seguinte problema do Cálculo das Variações:*

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b \dot{x}(t)^2 dt \to \min,$$
$$x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta.$$

O Lagrangeano é $L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}(t)^2$, então

$$L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 2\dot{x}(t) \text{ e } L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

De (1.2) a equação de Euler-Lagrange é

$$\frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) = 0 \Rightarrow \ddot{x}(t) = 0$$

e integrando duas vezes os dois membros da equação vem que $x(t) = c_1 t + c_2$. Como $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$, então $x(t) = \frac{1}{a-b}\big((\alpha - \beta)t + a\beta - b\alpha\big)$.

Verificando as condições de Jacobi podemos afirmar então que $x(\cdot)$ é minimizante do problema fundamental do Cálculo das Variações.

1.4 Controlo Óptimo

A teoria do Controlo Óptimo é uma área relativamente recente da Matemática: nasceu em meados dos anos cinquenta do século passado. É uma teoria importante que permite dar resposta a muitos problemas que surgem nas mais diversas áreas da Ciência, como sejam a Engenharia e as Ciências do Espaço.

As formulações do problema matemático do controlo óptimo podem ser construídas de várias formas, sendo todas elas equivalentes entre si, como por exemplo: problema do Controlo Óptimo de Lagrange, de Bolza, de Mayer, ... O problema de Controlo Óptimo é uma generalização do problema do Cálculo das Variações.

Neste ponto vamos analisar um conjunto de condições necessárias de optimalidade para o problema de controlo óptimo. Tal resultado é conhecido na literatura como o *princípio do máximo*[4] e pode ser interpretado como um teorema de multiplicadores de Lagrange em espaços de dimenção infinita.

Definição 18 *(Problema de Lagrange do Controlo Óptimo). O problema do Controlo Óptimo é definido como se segue:*

$$J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), u(t))dt \to \min \tag{1.17}$$

sob as condições de fronteira

$$x(a) = A \quad e \; x(b) = B, \tag{1.18}$$

e sujeito ao sistema dinâmico de controlo

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \forall t \in [a, b], \tag{1.19}$$

onde

$$x(\cdot) \in PC^1([a,b], \mathbb{R}^n) \; e \; u(\cdot) \in PC([a,b], \Omega \subseteq \mathbb{R}^m),$$

e $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ *e* $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *são funções de classe* C^2.

Definição 19 *O sistema de equações diferenciais ordinárias dado por* (1.19) *designa-se por sistema de controlo.*

[4]Também conhecido como princípio do mínimo, ou princípio de Pontryagin.

O teorema seguinte é a condição necessária de optimalidade central da teoria do Controlo Óptimo quando aplicado ao Problema (1.17)-(1.19).

Teorema 20 *(Princípio do Máximo de Pontryagin) Se* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *for minimizante do problema* (1.17)-(1.19)*, então existe um par não nulo* $(\psi_0, \psi(\cdot))$*, com* ψ_0 *uma constante negativa* ($\psi_0 < 0$) *e* $\psi(\cdot)$ *uma função vectorial diferenciável, tal que* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *satisfaz:*

1. *O sistema Hamiltoniano*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)), \ (\textit{sistema de controlo}) \\ \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)), \ (\textit{sistema adjunto}) \end{cases} \tag{1.20}$$

2. *A condição de máximo*

$$\mathcal{H}(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) = \max_{v \in \Omega} \mathcal{H}(t, x(t), v, \psi_0, \psi(t)) \tag{1.21}$$

onde o hamiltoniano $\mathcal{H}$ *é definido por* $\mathcal{H}(t, x, u, \psi_0, \psi) = \psi_0 L(t, x, u) + \psi.\varphi(t, x, u)$.

Definição 21 *A um quaterno* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *que satisfaz o Princípio do Máximo de Pontryagin chamamos de extremal de Pontryagin.*

- *Quando* $\psi_0 = 0$*, a extremal diz-se anormal.*
- *Quando* $\psi_0 < 0$*, a extremal diz-se normal.*

As extremais anormais existem e ocorrem frequentemente para o problema do Controlo Óptimo. No entanto, para o problema fundamental do Cálculo das Variações não existem extremais anormais.

A diferença principal entre o Problema de Controlo Óptimo (1.17)-(1.19) e o Problema do Cálculo das Variações (1.1) consiste na possibilidade de haver restrições a $u(t)$, que descrevem a possibilidade de controlar o sistema. O problema (1.1) pode ser escrito como um problema (1.17)-(1.19) fazendo $\varphi(t, x, u) = u$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$ ($m = n$, $\dot{x}(t) = u(t)$ e não existem restrições nos valores de $u(t)$ do controlo).

O Hamiltoniano associado a (1.1) é dado por

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi_0, \psi) = \psi_0 L(t, x, u) + \psi u.$$

A condição de máximo (1.21) implica que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$, ou seja,

$$\psi_0 \frac{\partial L}{\partial u} + \psi = 0 \Leftrightarrow \psi = -\psi_0 \frac{\partial L}{\partial u}.$$

Se existissem extremais anormais, então $\psi_0 = 0$ implicaria que $\psi = 0$ o que é uma contradição ao Princípio do Máximo de Pontryagin. Concluímos que não existem extremais anormais para o problema (1.1).

O problema do cálculo das variações com derivadas de ordem superior,

$$\begin{gathered}\int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(r)}(t))dt \to \min, \\ x(a) = x_a^0, x(b) = x_b^0, \\ \vdots \\ x^{(r-1)}(a) = x_a^{r-1}, x^{(r-1)} = x_b^{r-1},\end{gathered} \tag{1.22}$$

é também um caso particular do problema de Controlo Óptimo. Introduzindo a notação $x^0(t) = x(t), ..., x^{r-1}(t) = x^{(r-1)}(t), u(t) = x^{(r)}(t), X = \left(x^0, ..., x^{r-1}\right)$, obtemos $\left(U = \mathbb{R}^n\right)$:

$$\begin{gathered}I[X(\cdot), u(\cdot)] = \int_a^b L(t, X(t), u(t))dt \to min, \\ \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ X(a) = \alpha, X(b) = \beta,\end{gathered} \tag{1.23}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} x_a^0 \\ \vdots \\ x_a^{r-1} \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} x_b^0 \\ \vdots \\ x_b^{r-1} \end{bmatrix}.$$

Proposição 22 *Ao longo das extremais* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *do problema de controlo óptimo* (1.17)-(1.19) *sem restrições nos valores do controlos (isto é* $\Omega = \mathbb{R}^m$*) verifica-se a seguinte propriedade:*

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)). \tag{1.24}$$

Demonstração. A derivada total do Hamiltoniano é dada por

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}\dot{\psi}.$$

Usando o sistema Hamiltoniano (1.20) e a condição de máximo (1.21), obtemos a igualdade pretendida. ■

Quando o problema de Controlo Óptimo (1.17)-(1.19) não depende explicitamente da variável independente t (quando é autónomo), obtemos de (1.24) que

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) = constante. \tag{1.25}$$

Para o problema fundamental do Cálculo das Variações (1.1), temos que $\varphi = u \Rightarrow \mathcal{H} = -L + \psi.u$ e aplicando o Teorema 20, obtemos que

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = u,$$
$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \psi = \frac{\partial L}{\partial u} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u}.$$

Corolário 23 *Uma condição necessária para $x(\cdot)$ ser solução do problema fundamental do cálculo das variações ($\dot{x}(t) = u(t)$) é dada pela condição de DuBois-Reymond:*

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\Big\{L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial u}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t)\Big\}. \tag{1.26}$$

Demonstração. Atendendo a que não existem extremais anormais ($\psi_0 = -1$) da Proposição 22 resulta que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

com $\mathcal{H}(t, x, u, \psi_0, \psi) = -L(t, x, u) + \psi\varphi(t, x, u), \psi = \frac{\partial L}{\partial u}(t, x(t), u(t))$ *e* $\varphi(t, x, u) = \dot{x}(t)$. A condição necessária clássica de DuBois-Reymond (1.26) é uma consequência imediata desta igualdade. ■

Corolário 24 . *Se $x(\cdot)$ for solução do problema do Cálculo das Variações com derivadas de ordem superiores* (1.22), *então:*

1. *$x(\cdot)$ é uma extremal normal (não ocorre o caso anormal para o problema do Cálculo das Variações com derivadas de ordem superior);*

2. $x(\cdot)$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange de ordem superior:

$$\sum_{i=0}^{r-1}\left\{(-1)^i\frac{d^i}{dt^i}\frac{\partial L}{\partial x^i}\right\}+(-1)^r\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u}=0.$$

Uma demonstração do Corolário 24 pode ser encontrado em [33].

Nota 25 *Vamos começar a denotar o Princípio do Máximo de Pontryagin por P.M.P. e a equação de Euler-Lagrange por E-L.*

Exemplo 26 *Determine as extremais (candidatos a minimizante dados pelo P.M.P.) para o seguinte problema de Controlo Óptimo*

$$\int_0^1 \big(x^2(t)-x(t)u(t)+u^2(t)\big)dt \to \min$$
$$\dot{x}(t)=x(t)+u(t); x(0)=x_0; x(1)=x_1.$$

Resolução:
Como $u(t)=\dot{x}(t)-x(t)$ então o Lagrangeano é dado por

$$L(t,x(t),\dot{x}(t))=3x^2(t)-3x(t)\dot{x}(t)+\dot{x}^2(t).$$

Da equação de E-L

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Leftrightarrow 6x(t)-3\dot{x}(t)=-3\dot{x}(t)+2\ddot{x}(t)$$

vem

$$\ddot{x}(t)-3x(t)=0.$$

Então, $x(t)=C_1e^{-\sqrt{3}t}+C_2e^{\sqrt{3}t}$.

Vamos utilizar o P.M.P. para determinar a extremal do Exemplo 26.

O Hamiltoniano do Exemplo 26 é definido por

$$\mathcal{H}(t,x,\psi_0,\psi,u)=\psi_0\big(x^2(t)-x(t)u(t)+u^2(t)\big)+\psi\big(x(t)+u(t)\big).$$

É facil concluir que não ocorre caso anormal, por isso podemos fixar $\psi_0=-1$.

Pela condição de máximo (condição de estacionaridade) vem

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u}&=0\\ \Leftrightarrow x-2u+\psi&=0 \qquad (1.27)\\ \Leftrightarrow u&=\frac{x+\psi}{2}.\end{aligned}$$

Substituindo a expressão do u (1.27) no sistema Hamiltoniano vem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{3}{2}x + \frac{\psi}{2} \\ \dot{\psi}(t) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\psi \end{cases} \tag{1.28}$$

Usando o Sistema de Computação Algébrica Maple fazemos:

```
# defini\c{c}\~{a}o do Hamiltoniano
> H:=(x,psi0,psi,u)->psi0*(x^2-x*u+u^2)+psi*(x+u)$;
```

$$H := (x, psi0, \psi, u) \mapsto psi0\ \left(x^2 - xu + u^2\right) + \psi\ (x + u)$$

```
> u:=t->solve(D[4](H)(x(t),-1,psi(t),u)=0,u):
> u(t);
```

$$\frac{1}{2}\,x\,(t) + \frac{1}{2}\,\psi\,(t)$$

```
# Sistema Hamiltoniano
> eq1:=diff(psi(t),t)=-D[1](H)(x(t),-1,psi(t),u(t));
```

$$\frac{d}{dt}\psi\,(t) = \frac{3}{2}\,x\,(t) - \frac{3}{2}\,\psi\,(t)$$

```
> eq2:=diff(x(t),t)=D[3](H)(x(t),-1,psi(t),u(t));
```

$$\frac{d}{dt}x\,(t) = \frac{3}{2}\,x\,(t) + \frac{1}{2}\,\psi\,(t)$$

```
> sol:=dsolve({eq1,eq2});
```

$$\left\{\psi\,(t) = \_C1\ e^{\sqrt{3}t} + \_C2\ e^{-\sqrt{3}t}, x\,(t) = \frac{2}{3}\,\_C1\ \sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} - \frac{2}{3}\,\_C2\ \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t} + \_C1\ e^{\sqrt{3}t} + \_C2\ e^{-\sqrt{3}t}\right\}$$

```
> assign(sol);

> u(t);
```

$$\frac{1}{3}\,\_C1\ \sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{3}\,\_C2\ \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t} + \_C1\ e^{\sqrt{3}t} + \_C2\ e^{-\sqrt{3}t}$$

Os valores concretos das constantes $\_C1$ e $\_C2$ são determinados usando os valores concretos de x_0 e x_1.

Capítulo 2

Teorema de Noether do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo

2.1 Introdução

Emmy Noether, nascida em Março de 1882 na Baviéra-Alemanha, é considerada a "mãe"da Álgebra Moderna (Abstracta).

Após Albert Einstein publicar a teoria da Relatividade Geral, os matemáticos ficaram alvoroçados e permitiram-se explorar as propriedades desse novo e revolucionário território. A famosa teoria da Relatividade além de rudimentar e estranha apresentava problemas. Emmy Noether deu resposta a importantes questões valendo-se da simetria dos problemas. O teorema de Noether afirma que as leis de conservação são resultado das leis de simetria e constituiu um grande avanço para a época.

Vamos falar sobre as leis de conservações da quantidade de movimento e da energia.

Lei de conservação da quantidade de movimento

Se a função L não depende de $x : L = L(t, \dot{x})$, ocorre a lei de conservação da quantidade de movimento. A equação de Euler-Lagrange (1.2) tem a forma

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = 0,$$

o que implica que

$$L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = constante.$$

.

Lei de Conservação da energia

Se a função L não depende de $t : L = L(x, \dot{x})$, então obtemos a lei de conservação da energia:

$$\dot{x}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)) = constante.$$

Com efeito, para toda a solução $x(t)$ da equação de Euler-Lagrange temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\dot{x}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t))) \\ &\qquad = \frac{d}{dt}(\dot{x}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))) - \frac{d}{dt}(L(x(t), \dot{x}(t))) \\ &\qquad = \ddot{x}L_{\dot{x}} + \dot{x}L_x - \dot{x}L_x - \ddot{x}L_{\dot{x}} \\ &\qquad = 0. \end{aligned}$$

Encontrar a solução geral da equação de Euler-Lagrange consiste em determinar soluções de uma equação diferencial de segunda ordem, e é geralmente muito difícil. As leis de conservações são funções $\Phi(t, x(t), \dot{x}(t))$ constantes ao longo de todas as soluções $x(t)$ da equação de Euler-Lagrange o que nos permite baixar a ordem das equações diferenciais dadas pelas condições necessárias, que podem simplificar o processo de resolução dos problemas do Cálculo das Variações e do Controlo Óptimo.

2.2 Teorema de Noether no Cálculo das Variações

Vamos considerar um grupo uni-paramétrico de transformação C^2 da forma

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \Phi(t, x, \varepsilon) \\ \overline{x} &= \Psi(t, x, \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde Φ *e* Ψ são funções analíticas de $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$. Admitimos que a transformação (2.1) para $\varepsilon = 0$ reduz-se à identidade:

$$\bar{t} = \Phi(t, x, 0) = t$$

$$\overline{x} = \Psi(t, x, 0) = x.$$

Numa vizinhança de $\varepsilon = 0$ Φ *e* Ψ podem ser expandidas em série de Taylor:

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= t + \varepsilon \frac{\partial \Phi(t,x,0)}{\partial \varepsilon} + \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Phi(t,x,0)}{\partial \varepsilon^2} \cdots \\
&= t + T(t,x)\varepsilon + o(\varepsilon); \\
\overline{x}(\bar{t}) &= x(t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(t,x,0)}{\partial \varepsilon} + \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Psi(t,x,0)}{\partial \varepsilon^2} \cdots \\
&= x + X(t,x)\varepsilon + o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
T(t,x) &= \frac{\partial \Phi(t,x,0)}{\partial \varepsilon} \\
X(t,x) &= \frac{\partial \Psi(t,x,0)}{\partial \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Na literatura T *e* X são designados por geradores infinitesimais das transformação Φ e Ψ respectivamente.
Vamos dar agora a definição de invariância de uma funcional integral do cálculo das Variações.

Definição 27 ***(Invariância de*** (1.1)***)*** *Dizemos que a funcional integral* (1.1) *é invariante sob as transformação infinitesimais*

$$\begin{cases} \bar{t} = t + T(t,x)\varepsilon + o(\varepsilon). \\ \bar{x} = x + X(t,x)\varepsilon + o(\varepsilon) \end{cases} \tag{2.2}$$

se, e só se,

$$\int_{t_a}^{t_b} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} L(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}), \dot{\bar{x}}(\bar{t}))d\bar{t} \tag{2.3}$$

para todo o subintervalo $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$.

Teorema 28 *(Condição necessária e suficiente de invariância) Se a funcional integral* (1.1) *é invariante no sentido da Definição 27, então*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial t}(t,x(t),\dot{x}(t))T(t,x) + \frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t))X(t,x) \\
&+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\Big(\dot{X}(t,x) - \dot{x}\dot{T}(t,x)\Big) + L(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{T}(t,x) = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Demonstração. A equação (2.3) é valida para todo o subintervalo $[t_a, t_b] \in [a, b]$, o que nos permite escrever esta equação sem o sinal de integral, ou seja, se

$$\begin{cases} \bar{t} = t + T(t,x)\varepsilon + o(\varepsilon). \\ \bar{x} = x + X(t,x)\varepsilon + o(\varepsilon) \\ \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\bar{x} + \varepsilon\bar{X} + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon\bar{T} + o(\varepsilon)} \end{cases}$$

então

$$L(t, x(t), \bar{x}(t)) = L\left(t + T(t,x)\varepsilon + o(\varepsilon), x + X(t,x)\varepsilon + o(\varepsilon), \frac{\dot{x} + \varepsilon\dot{X} + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon\dot{T} + o(\varepsilon)}\right)\frac{d\bar{t}}{dt}.$$

Derivando os dois membros em ordem a ε e fazendo $\varepsilon = 0$ vem que

$$0 = \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,\dot{x})T + \frac{\partial L}{\partial x}(t,x,\dot{x})X + \frac{\partial L}{\partial \bar{x}}(t,x,\dot{x})\big(\dot{X} - \dot{x}\dot{T}\big) + L(t,x,\dot{x})\dot{T}.$$

■

Problema 29 *Consideremos a funcional integral*

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b \dot{x}^2(t)dt.$$

Neste caso temos $L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}(t) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ *e* $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}(t)$. Como

$$T(t,x) \Rightarrow \dot{T} = \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial T}{\partial x}$$
$$X(t,x) \Rightarrow \dot{X} = \frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial X}{\partial x}$$

da equação (2.4) vem que

$$2\dot{x}(t)\Big(\frac{\partial X}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial X}{\partial x} - \dot{x}\big(\frac{\partial T}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial T}{\partial x}\big)\Big) + \dot{x}^2\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial T}{\partial x}\Big) = 0$$
$$\Leftrightarrow \dot{x}^3\frac{\partial T}{\partial x} + \dot{x}\Big(2\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial t}\Big) + 2\dot{x}\frac{\partial X}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{2.5}$$

$$2\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{2.6}$$

$$2\frac{\partial X}{\partial t} = 0 \tag{2.7}$$

De (2.5) podemos afirmar que T não depende de x. Então $T(t,x) = T(t)$ e de (2.7) concluímos que X não depende de t, isto é, $X(t,x) = X(x)$.

A equação (2.6) é satisfeita se

$$2\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Isto implica que $2\frac{\partial X}{\partial x} = constante = \frac{\partial T}{\partial t}$, ou seja,

$$X(x) = cx + b_1 \tag{2.8}$$

e

$$T(t) = 2ct + b_2 \tag{2.9}$$

onde $c,\ b_1\ e\ b_2$ são constantes. Podemos verificar que os geradores infinitesimais definidos em (2.8) e (2.5) representam as simetrias para que a funcional do problema 29 seja invariante no sentido da Definição 27.

O próximo teorema é um dos teoremas mais importante da Física moderna e não só: o teorema de Noether, que foi formulado e demonstrado em 1918 pela Emmy Noether, é muito mais do que teorema. É um princípio geral sobre leis de conservação, com importantes implicações em várias áreas da Física Moderna, na Química, na Economia, nos problemas Estocásticos, etc.

Teorema 30 *(Teorema de Noether) Se a funcional integral* (1.1) *é invariante no sentido da Definição 27, então*

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}L(t,x,\dot{x})X(t,x) - (L(t,x,\dot{x}) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}L(t,x,\dot{x})\dot{x})T(t,x) = const \tag{2.10}$$

é uma lei de conservação.

Demonstração. Vamos fazer a demostração do teorema de Noether usando a condição de DuBois-Raymond vista no Corolário 23. A equação de Euler-Lagrange (1.2) diz-nos que

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)).$$

Podemos então escrever a condição necessária de invariância (2.4) como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial t}(t,x(t),\dot{x}(t))T(t,x) + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))X(t,x)\\
&+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))(\dot{X}(t,x) - \dot{x}\dot{T}(t,x)) + L(t,x,\dot{x})\dot{T}(t,x) = 0\\
&\iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))X(t,x) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{X}(t,x)\\
&+\frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t))T(t,x) + \dot{T}(t,x)(L(t,x(t),\dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{x}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Usando a condição de DuBois-Raymond (Corolário 23) podemos escrever (2.11) da forma

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))X(t,x)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{X}(t,x)\\
&+\frac{d}{dt}\{L(t,x(t),\dot{x}(t))-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\}T(t,x)\\
&+\dot{T}(t,x)(L(t,x(t),\dot{x}(t)-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)))=0\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))X(t,x)+(L(t,x(t),\dot{x}(t))-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)))T(t,x)\right\}=0
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))X(t,x)+(L(t,x(t),\dot{x}(t))-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)))T(t,x)=constante.$$

■

2.3 Teorema de Noether no Controlo Óptimo

O teorema de Noether no Controlo Óptimo relaciona a invariância de um problema sob uma família de transformações com a existência de quantidades preservadas ao longo das extremais de Pontryagin. Neste trabalho restringimo-nos aos problemas normais.

No caso normal, o problema do Controlo Óptimo na forma de Lagrange é equivalente ao seguinte problema (utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange):

$$I[x(\cdot),u(\cdot),\psi(\cdot)]=\int_a^b\left[\mathcal{H}\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)-\psi(t)\cdot\dot{x}(t)\right]dt\longrightarrow\max \tag{2.12}$$

onde $\mathcal{H}$ é dado pelo Teorema 20.

A noção de invariância do problema (1.17)-(1.19) é definida à custa do problema equivalente (2.12).

Definição 31 ***(Invariância do Problema de Controlo Óptimo)*** *Dizemos que a funcional integral* (2.12) *é invariante sob as transformações infinitesimais*

$$\begin{cases}\bar{t}(t)=t+\varepsilon T(t,x(t),u(t),\psi(t))+o(\varepsilon)\,,\\ \bar{x}(t)=x(t)+\varepsilon X(t,x(t),u(t),\psi(t))+o(\varepsilon)\,,\\ \bar{u}(t)=u(t)+\varepsilon\varrho(t,x(t),u(t),\psi(t))+o(\varepsilon)\,,\\ \bar{\psi}(t)=\psi(t)+\varepsilon\varsigma(t,x(t),u(t),\psi(t))+o(\varepsilon)\,,\end{cases} \tag{2.13}$$

se, e só se,

$$\left[\mathcal{H}(\bar{t},\bar{x},\bar{u},\bar{\psi}) - \bar{\psi}\cdot\dot{\bar{x}}\right] d\bar{t} = \left[\mathcal{H}(t,x,u,\psi) - \psi\cdot\dot{x}\right] dt, \quad t\in[a,b]\,. \tag{2.14}$$

As funções T, X, ϱ, e ς são conhecidas como *geradores infinitesimais* das transformações (2.13).

Teorema 32 ***(Condição necessária e suficiente de invariância)*** *A funcional integral* (2.12) *é invariante no sentido da Definição 31 se, e só se,*

$$T\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} + X\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}\cdot\varrho + \varsigma\cdot\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi} - \dot{x}\right) - \dot{X}\cdot x + \dot{T}\mathcal{H} = 0\,. \tag{2.15}$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [8]. ■

Vamos agora formular uma extensão do Teorema de Noether para o contexto do Controlo Óptimo. Primeiro vamos definir lei de conservação.

Definição 33 ***(Lei de Conservação)*** *Dizemos que a quantidade $C(t,x(t),u(t),\psi(t))$ é um* primeiro integral *se, e só se, $\frac{d}{dt}C(t,x(t),u(t),\psi(t)) = 0$ ao longo de todas as extremais de Pontryagin $(x(\cdot),u(\cdot),\psi(\cdot))$. À equação $C(t,x(t),u(t),\psi(t)) = constante$ chamamos lei de conservação.*

Teorema 34 ***(Teorema de Noether)*** *Se o problema do Controlo Óptimo (Definição 18) é invariante no sentido da Definição 31, então*

$$C(t,x,u,\psi) = \mathcal{H}(t,x,u,\psi)T(t,x) - \psi\cdot X(t,x) \tag{2.16}$$

é uma lei de conservação.

Demonstração. Ver [8]. ■

Capítulo 3

Cálculo das Variações Estocástico

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos introduzir as derivadas de Nelson, que foram propostas por E. Nelson em 1967 (ver [27]) usando um argumento geométrico. A não diferenciabilidade das trajectórias de um movimento Browniano foi usada por E. Nelson para justificar o facto de se precisar de um substituto para a derivada clássica ao estudar os processo de Winer. Vamos definir as derivadas de Nelson para os Bons Processos de Difusão (movimento Browniano) e as propriedades das derivadas estocásticas.

3.2 Derivada estocástica de Nelson

Nesta secção vamos falar da extensão das derivadas clássicas para as derivadas estocásticas. Vamos ver as propriedades das derivadas estocásticas e a generalização da regra da derivada do produto de Nelson, as derivadas estocásticas para as funcionais dos processos de difusão e vamos definir quando um processo é Nelson diferenciável.

Consideramos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde $(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço mensurável e P uma probabilidade nele definida. O espaço amostral Ω representa o conjunto (suposto não-vazio) de todos os possíveis resultados de uma experiência ou fenómeno aleatório. $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra, isto é, uma classe não-vazia de subconjuntos de Ω fechada para o complementar (se $A \in \mathcal{F}$, então o complemento $A^c := \Omega - A \in \mathcal{F}$) e para uniões contáveis (se $A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, ...,$ então $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$). Os conjuntos $A \in \mathcal{F}$ são chamados acontecimentos ou conjuntos mensuráveis. A probabilidade P é uma função de $\mathcal{F}$ em $[0, 1]$,

normada ($P(\Omega) = 1$) e aditiva-σ.
Seja $\mathcal{P}_t$ uma filtração, isto é, uma sucessão $\mathcal{P}_t$ da σ- álgebra de $\mathcal{F}$, crescente, isto é, tal que $\mathcal{P}_t \leq \mathcal{P}_{t+1}$ e $\mathcal{F}_t$ uma filtração decrescente.

Definição 35 *X é adaptada a $\mathcal{P}_t$ (adaptada a $\mathcal{F}_t$) se para cada t, X é $\mathcal{P}_t$ mensurável ($\mathcal{F}_t$ mensurável).*

Um processo estocástico no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é simplesmente uma colecção indexada $\{X_t\}_{t\in I}$ de variáveis aleatórias (v.a.). No nosso caso, t será interpretado como tempo e o conjunto de índices I será usualmente um intervalo de tempo da forma $[0, +\infty), (-\infty, +\infty)$ *ou* $[a, b]$ (processos estocásticos em tempo contínuo). Noutras situações, I pode ser o conjunto dos inteiros ou dos inteiros não negativos (processos estocásticos em tempo discreto), um intervalo de $\mathbb{R}^d$ (processos espaciais) ou qualquer conjunto conveniente. Como cada variável aleatória $X_t = X_t(w)$ é função do "acaso"$w \in \Omega$, um processo estocástico pode ser considerado uma função de duas variáveis, $t \in I$ *e* $w \in \Omega$, isto é, uma função do tempo e do acaso. Vamos escrever X_t em vez de $X_t(w)$. Esta função de t *e* w não é uma função arbitrária pois esta está sujeita à restrição de ser, para cada t fixo, uma função mensurável de w, isto é, uma v.a.
Se fixarmos o "acaso"w, obtemos uma função apenas do tempo, a que se chama uma trajectória do processo estocástico.

Definição 36 *Seja $X_t(\cdot)$ um processo definido em $I \times \Omega$. O processo diz-se S0-processo se: $X_t(\cdot)$ tem um caminho simples contínuo, $X_t(\cdot)$ é $\mathcal{P}_t$ e $\mathcal{F}_t$ adaptado, para cada $t \in \overline{I}$, $X_t \in L^2(\Omega)$ e a aplicação $t \to X_t$, de $\overline{I}$ em $L^2(\Omega)$, é contínua.*

Definição 37 *(ver [4]) Seja $X_t(\cdot)$ um processo. Dizemos que $X_t(\cdot)$ é S1-processo se ele for S0-processo e*

$$DX_t = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{P}_t] \tag{3.1}$$

e

$$D_*X_t = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}E[X_t - X_{t-h}|\mathcal{F}_t], \tag{3.2}$$

existem em $L^2(\Omega)$, para $t \in I$, e as aplicações $t \to DX_t$ e $t \to D_*X_t$ são contínuas de I em $L^2(\Omega)$. A DX_t e D_*X_t chamamos, respectivamente, derivada de Nelson estocástica à direita e à esquerda.

Definição 38 *Denotamos por $\mathcal{C}^1(I)$ o espaço dos S1-processos munido da norma*

$$\|X\| = \sup_{t\in I} \big(\|X(t)\|_{L^2(\omega)} + \|DX(t)\|_{L^2(\omega)} + \|D_*X_t\|_{L^2(\omega)}\big). \tag{3.3}$$

Um processo de Markov é um processo estocástico em que, conhecido o seu valor presente, os valores futuros são independentes dos valores passados. Por outras palavras, quando alguém conhece exactamente o valor presente do processo, conhecer ou não como é que o processo evoluiu no passado para chegar a esse valor presente é irrelevante para o cálculo de probabilidades de acontecimentos futuros.

Consideremos um intervalo de tempo $I = [0, b]$ com $0 \leq b \leq +\infty$, um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in I}$ definido nesse espaço. O processo é um processo de Markov em tempo contínuo se, para quaisquer $s, t \in I$, $s \leq t$, e qualquer conjunto Borel $B \in \mathcal{B}$, tivermos

$$P[X_t \in B | X_u, 0 \leq u \leq s] = P[X_t \in B | X_s]. \tag{3.4}$$

Há várias definições não equivalentes do que se entende por processo de difusão. Para simplificar, vamos apresentar a notação abreviada $\mathbb{E}_{s,x}[\cdots]$ para as esperanças matemáticas condicionais $\mathbb{E}[\cdots | X_s = x]$, onde "$\cdots$" representa alguma *v.a.* e X_t é um processo estocástico.

Seja $\{X_t\}_{t \in [0,b]}$ um processo estocástico num espaço probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dizemos que é um processo de difusão se for um processo de Markov com trajectórias quase sempre (*q.s.*) contínuas tal que $X_t \in L^2(t \in [0, b])$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $s \in [0, b)$, vier, com convergências uniformes com respeito a $s \in [0, d)$,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} P[|x_{s+h} - x| > \varepsilon | X_s = x] = 0 \; \textit{para todo o} \; \varepsilon > 0, \tag{3.5}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \mathbb{E}_{s,x}\left[\frac{x_{s+h} - x}{h}\right] = b(s, x), \tag{3.6}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \mathbb{E}_{s,x}\left[\frac{(x_{s+h} - x)^2}{h}\right] = c(s, x). \tag{3.7}$$

O momento infinitésimal de primeira ordem $b(s, x)$, chamado coeficiente de tendência (em Inglês, é conhecido por "drift"), é a velocidade média de X no instante s quando $X_s = x$. Também se lhe pode chamar média infinitésimal. Quanto ao momento infinitésimal de segunda ordem $c(s, x)$, chamado de difusão, ele mede a intensidade das flutuações e é a velocidade da variância do processo X no instante s quando $X_s = x$. Também pode ser designado por variância infinitésimal.

O processo de Wiener desempenha um papel essencial nas equações diferenciais estocásticas. Ele traduz o efeito acumulado das perturbações aleatórias que afectam a dinâmica do fenómeno em estudo, ou seja, é o integral do ruído perturbador que se supõe ser ruído branco em tempo contínuo. Em 1900 Bachelier usou o Processo de Winer para modelar a cotação de uma acção na Bolsa e Einstein usou-o em 1905 para modelar o movimento Browniano de uma partícula suspensa num fluído. Porém, só a partir de 1920 é que ele foi rigorosamente estudado por Winer e por Lévy. Denotamos o processo de Winer padrão por W_t ou $W(t)$.

Definição 39 *Dado um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *, um processo estocástico* $\{W_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ *definido nesse espaço diz-se um processo de Winer padrão (ou movimento Browniano) se satisfizer as seguintes propriedades:*

- $W(0) = 0$ *q.s.*
- *Os incrementos* $W(t)-W(s)$ $(s < t)$ *têm distribuição normal com média* 0 *e variância* $t - s$*.*
- *Os incrementos* $W(t_i) - W(s_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *em intervalos de tempo* $(s_i, t_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ *não-sobrepostos são v.a. independentes (diz-se simplesmente que tem incrementos independentes).*

Vamos agora enunciar um teorema para as derivadas de Nelson para os bons processos de difusão.

Definição 40 *(ver [5, Definição 1.5]) Denotamos por* Λ^1 *os processos de difusão* X *que satisfazem as seguintes condições:*

1. X *é solução da equação diferencial estocástica*
$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \;\; X(0) = X_0, \tag{3.8}$$
onde $X_0 \in L^2(\Omega), W(\cdot)$ *é movimento* $\mathcal{P}$*-Browniano,* $b : \overline{I} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *e* $\sigma : \overline{I} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d$ *são funções Borel mensuráveis satisfazendo as seguintes hipóteses: existe uma constante* K *tal que para todos* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *nós temos*
$$\sup_t (|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)|) \leq K|x - y|, \tag{3.9}$$
$$\sup_t (|\sigma(t, x)| + |b(t, x)|) \leq K(1 + |x|). \tag{3.10}$$
2. *Para todo* $t \in I, X(t)$ *tem uma função densidade* $p_t(x)$ *no ponto* x*.*

3. Fixando $a_{ij} = (\sigma\sigma^*)_{ij}$, para qualquer $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e para qualquer $t_0 \in I$

$$\int_{t_0}^{1} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j (a_{ij}(t,x) p_t(x))| dx dt < +\infty. \tag{3.11}$$

4. $X(\cdot)$ é uma difusão $\mathcal{F}$-Browniana.

Teorema 41 ([5]) *Seja $X \in \Lambda^1$ que se escreve $dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$, onde X é difusão de Markov com a respectiva filtração crescente $(\mathcal{P}_t)$ e filtração decrescente $(\mathcal{F}_t)$. Além disso existe DX e D_*X em relação a estas filtrações com*

$$\begin{aligned} DX(t) &= b(t, X(t)) \\ D_*X(t) &= b_*(t, X(t)), \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $x \to p_t(x)$ denota a densidade de $X(t)$ em x e

$$b_*^i(t,x) = b^i(t,x) - \frac{\partial_j (a^{ij}(t,x) p_t(x))}{p_t(x)}.$$

Por convenção, o termo $\frac{1}{p_t(x)}$ é 0 se $p_t(x) = 0$.

Definição 42 *Denotamos por $\mathcal{D}_\mu$ o operador definido por*

$$\mathcal{D}_\mu = \frac{D + D_*}{2} + i\mu \frac{D - D_*}{2}, \quad \mu = \pm 1. \tag{3.13}$$

Vamos definir derivadas estocásticas para as funcionais dos processos de difusão $f(t, X_t)$ onde X_t é um processo de difusão e f é uma função suave.

Definição 43 *Denotamos por $C_b^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$ o conjunto das funções $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $(t,x) \to f(t,x)$ tais que $\partial_t f$, ∇f e $\partial_{x_i x_j} f$ existem e são limitadas.*

Lema 44 ([5]) *Seja $X \in \Lambda^1$ e $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$. Então temos*

$$Df(t, X(t)) = \Big[\partial_t f + DX(t).\nabla f + \frac{1}{2} a^{ij} \partial_{x_i x_j} f\Big](t, X(t)) \tag{3.14}$$

$$D_*f(t, X(t)) = \Big[\partial_t f + D_*X(t).\nabla f - \frac{1}{2} a^{ij} \partial_{x_i x_j} f\Big](t, X(t)). \tag{3.15}$$

Corolário 45 ([5]) *Seja $X \in \Lambda^1$ e $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$. Então temos*

$$\mathcal{D}_\mu f(t, X(t)) = \Big[\partial_t f + \mathcal{D}_\mu X(t).\nabla f + \frac{i\mu}{2} a^{ij} \partial_{x_i x_j} f\Big](t, X(t)). \tag{3.16}$$

Corolário 46 ([5]) *Seja* $X \in \Lambda^1$ *com coeficiente de difusão constante* σ *e* $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$. *Então temos*

$$\mathcal{D}_\mu f(t, X(t)) = \Big[\partial_t f + \mathcal{D}_\mu X(t).\nabla f + \frac{i\mu\sigma^2}{2}\Delta f\Big](t, X(t)). \tag{3.17}$$

A regra usual de Leibniz no cálculo da derivada do produto é $(fg)' = f'g + fg'$. De seguida apresentamos a fórmula para o cálculo da derivada do produto estocástico de Nelson.

Teorema 47 ([5]) *Seja* $X, Y \in \mathcal{C}^1(I)$. *Então*

$$\frac{d}{dt}E[X(t)Y(t)] = E[DX(t).Y(t) + X(t).D_*Y(t)]. \tag{3.18}$$

Lema 48 ([5]) *Seja* $X, Y \in \mathcal{C}^1(I)$. *Então*

$$\frac{d}{dt}E[X(t)Y(t)] = E[Re(\mathcal{D}X(t)).Y(t) + X(t).Re(\mathcal{D}Y(t))], \tag{3.19}$$

$$E[Im(\mathcal{D}X(t)).Y(t)] = E[X(t).Im(\mathcal{D}Y(t))]. \tag{3.20}$$

Vamos agora definir quando um processo é Nelson Diferenciável.

Definição 49 *Um processo* X *é chamado de Nelson diferenciável se* $DX = D_*X$. *Escrevemos então que* $X \in \mathcal{N}^1(I)$.

Corolário 50 ([5]) *Seja* $X, Y \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(I)$. *Se* X *é Nelson diferenciável então*

$$E[\mathcal{D}_\mu X(t).Y(t) + X(t).\mathcal{D}_\mu Y(t)] = \frac{d}{dt}E[X(t)Y(t)]. \tag{3.21}$$

3.3 Cálculo das Variações Estocástico

Nesta secção vamos associar uma equação de Euler-Lagrange estocástica a uma funcional estocástica, seguindo a abordagem feita em [5]. Vamos ver que existe uma analogia com o Princípio da Acção Mínima.

3.3.1 Funcional e Processo L-adaptado

Nesta secção denotamos como I o intervalo aberto dado por (a, b), $a < b$.

Vamos definir funcional estocástica e Processo L-adaptado.

Definição 51 *Um Lagrangiano admissível é uma função L tal que*

1. *A função $L(x,v,t)$ é definida em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$, holomorfa na segunda variável.*

2. *L é autónomo, isto é, L não depende do tempo, ou seja, $L(x,v,t) = L(x,v)$.*

Definição 52 *Seja L um Lagrangiano admissível. Seja*

$$\Xi = \left\{ X \in \mathcal{C}^1(I), E\left[\int_I |L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))| dt \right] < \infty \right\}.$$

A funcional associada a L é definida por

$$F_I : \begin{cases} \Xi \rightarrow \ \mathbb{C} \\ X \mapsto E\left[\int_I L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) dt \right]. \end{cases} \tag{3.22}$$

Definição 53 *Seja L um Lagrangiano. Um processo $X \in \mathcal{C}^1(I)$ é chamado de L-adaptado se:*

1. *Para todo o $t \in I$, $\partial_x L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))$ é $\mathcal{P}_t$ e $\mathcal{F}_t$ mensurável e $\partial_x L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \in L^2(\Omega)$.*

2. *$\partial_v L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \in \mathcal{C}^1(I)$.*

3.3.2 Espaço Variacional

O Cálculo das Variações está preocupado com o comportamento das variações no âmbito do espaço funcional subjacente. Um cuidado especial deve ser tomado no caso estocástico, para definir qual é a classe de variações que estamos a considerar. Usamos a seguinte definição:

Definição 54 *Seja Γ um subespaço de $\mathcal{C}^1(I)$. A Γ-variação de X é um processo estocástico da forma $X + Z$, onde $Z \in \Gamma$. Por outro lado,*

$$\Gamma_\Xi = \{Z \in \Gamma, \forall X \in \Xi, Z + X \in \Xi\},$$

onde Γ_Ξ denota um subespaço de Γ.

Vamos considerar dois subespaços variacionais: $\mathcal{N}^1(I)$ e $\mathcal{C}^1(I)$.

3.3.3 Função Diferenciável e Processo Crítico

Vamos definir função diferenciável. Seja Γ um subespaço de $\mathcal{C}^1(I)$.

Definição 55 *Seja L um Lagrangiano admissível. F_I é chamado Γ-diferenciável em $X \in \Xi \cap L$ se para todo $Z \in \Gamma_\Xi$*

$$F_I(X+Z) - F_I(X) = dF_I(X,Z) + R(X,Z), \tag{3.23}$$

onde $dF_I(X,Z)$ é uma função linear com $Z \in \Gamma_\Xi$ e $R(X,Z) = o(\parallel Z \parallel)$.

O ponto crítico estocástico é definido por:

Definição 56 *Um processo Γ-crítico para a funcional F_I é um processo estocástico $X \in \Xi \cap L$ tal que $dF_I(X,Z) = 0$ para todos os $Z \in \Gamma_\Xi$ com $Z(a) = Z(b) = 0$.*

Caso $\Gamma = \mathcal{C}^1(I)$:

Lema 57 *Seja L um Lagrangiano admissível com todas as segundas derivadas limitadas. A funcional F_I definida em (3.22) é $\mathcal{C}^1(I)$-diferenciável para todo o $X \in \Xi \cap L$ e $\mathcal{C}^1(I)_\Xi = \mathcal{C}^1(I)$. Para todos os $Z \in \mathcal{C}^1(I)$, a diferencial de F_I é dada por*

$$\begin{aligned} dF_I(X,Z) = E\Bigg[\int_a^b \Big[\frac{\partial L}{\partial x}(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u)) - \mathcal{D}_{-\mu}\big(\frac{\partial L}{\partial x}(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u))\big)\Big] Z(u) du\Bigg] \\ + g(Z, \partial_v L)(b) - g(Z, \partial_v L)(a), \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde

$$g(Z, \partial_v L)(s) = E[Z(u) \partial_v L(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u))]. \tag{3.25}$$

Demonstração. Ver [5, Cap. 7]. ■

Caso $\Gamma = \mathcal{N}^1(I)$:

Lema 58 *Seja L um Lagrangiano admissível com todas as segundas derivadas limitadas. A funcional F_I definida em (3.22) é $\mathcal{N}^1(I)$-diferenciável para todo o $X \in \Xi \cap \mathcal{L}$ e $\mathcal{N}^1(I)_\Xi = \mathcal{N}^1(I)$. Para todos os $Z \in \mathcal{N}^1(I)$, a diferencial é dada por*

$$\begin{aligned} dF_I(X,Z) = E\Bigg[\int_a^b \Big[\frac{\partial L}{\partial x}(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u)) - \mathcal{D}_{\mu}\big(\frac{\partial L}{\partial x}(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u))\big)\Big] Z(u) du\Bigg] \\ + g(Z, \partial_v L)(b) - g(Z, \partial_v L)(a), \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde

$$g(Z, \partial_v L)(s) = E[Z(u) \partial_v L(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u))]. \tag{3.27}$$

Demonstração. Ver [5, Cap. 7]. ■

3.3.4 Equação de Euler-Lagrange Estocástica

Nesta secção vamos determinar a equação de Euler-Lagrange estocástica (ver [5, Cap. 7]). Também aqui vamos considerar dois casos para o subespaço variacional: $\mathcal{N}^1(I)$ e $\mathcal{C}^1(I)$.

Equação de Euler-Lagrange Estocástica: Caso $\mathcal{C}^1(I)$

Teorema 59 *(ver [5, Cap. 7]) Seja L um Lagrangeano admissível com todas as segundas derivadas limitadas. Uma condição necessária e suficiente para que o processo $\Xi \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}^3(I)$ seja um processo $\mathcal{C}^1(I)$-crítico associado à funcional F_I é dada por*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}\Big[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))\Big] = 0. \tag{3.28}$$

A equação (3.28) *é chamada de equação de Euler-Lagrange estocástica global.*

Demonstração. Na demonstração, sem perda de generalidade, consideramos $I = (0,1)$. Seja $X \in \mathcal{C}^3(I)$ uma solução de

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}\Big[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))\Big] = 0. \tag{3.29}$$

Então X é $\mathcal{C}^1(I)$-crítico associado à funcional F_I.

Se X é $\mathcal{C}^1(I)$-crítico associado à funcional F_I, isto é, $dF_I(X,Z) = 0$, temos

$$Re(dF_I(X,Z)) = Im(dF_I(X,Z)) = 0.$$

Vamos definir

$$Z_n^{(1)}(u) = \phi_n^{(1)}(u).Re\left(\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}\Big[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))\Big]\right)$$

e

$$Z_n^{(2)}(u) = \phi_n^{(2)}(u).Im\left(\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}\Big[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))\Big]\right)$$

onde $(\phi_n^{(i)})_{n\in N}$ é uma sequência de $C^\infty([0,1] \to \mathbb{R}^+)$ determinística em $[0,1]$, isto é, para todo o $n \in N$, $\phi_n(0) = \phi_n(1) = 0$ e $\phi_n = 1$ em $[\alpha_n, \beta_n]$ com $0 < \alpha_n$, $\beta_n < 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$. Assim, para todo o $n \in N$,

$$Re(dF_I(X, Z_n^{(1)})) = E\left[\int_0^1 \phi_n(u) Re^2\left(\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}\Big[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))\Big]\right) du\right] = 0,$$

$$E\left[\int_0^1 Re^2\left(\frac{\partial L}{\partial x}(X(t),\mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t),\mathcal{D}_\mu X(t))\right]\right)du\right] = 0.$$

Usando o mesmo argumento temos

$$E\left[\int_0^1 Im^2\left(\frac{\partial L}{\partial x}(X(t),\mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t),\mathcal{D}_\mu X(t))\right]\right)du\right] = 0.$$

Portanto, para quase todos os $t \in [0,1]$ e quase todos $w \in \Omega$,

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X(t),\mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t),\mathcal{D}_\mu X(t))\right] = 0.$$

■

Equação de Euler-Lagrange Estocástica: Caso $\mathcal{N}^1(I)$

Lema 60 *(ver [5, Cap. 7]) Seja L um Langrageano admissível com as segundas derivadas limitadas. A equação*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X(t),\mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(X(t),\mathcal{D}_\mu X(t))\right] = 0 \tag{3.30}$$

é chamada de equação de Euler-Lagrange Estocástica (ELE). Uma solução X de (3.30) *é processo $\mathcal{N}^1(I)$-crítico para a funcional F_I associado a L.*

Capítulo 4

Teorema de Noether Estocástico

Neste capítulo vamos demonstrar o Teorema Noether no contexto estocástico para um problema autónomo. Para isso vamos definir, seguindo Cresson [4], vector tangente a um processo estocástico, a suspensão estocástica de uma família paramétrica de difeomorfismos, invariância e primeiro integral estocástico.

Seja $X \in \mathcal{C}^1(I)$ um processo estocástico. Definimos Vector Tangente a um processo estocástico de modo análogo ao vector tangente de X no ponto t.

Definição 61 *Seja $X \in \mathcal{C}^1(I), I \subset \mathbb{R}$. O vector tangente a X no ponto t é a variável $\mathcal{D}X(t)$.*

Vamos definir a noção de suspensão estocástica de uma família paramétrica de difeomorfismos.

Definição 62 *Seja $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ um difeomorfismo. A suspensão estocástica de ϕ é a aplicação $\Phi : P \to P$ definida por*

$$\forall X \in P,\ \Phi(X)_t(w) = \phi(X_t(w)). \tag{4.1}$$

Definição 63 *Um grupo uni-paramétrico de transformações $\Phi_s : \Upsilon \to \Upsilon,\ s \in \mathbb{R}$, onde $\Upsilon \subset P$, é chamado ϕ-grupo de suspensão agindo em Υ se existir um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos $\phi_s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $s \in \mathbb{R}$, de tal forma que para todo o $s \in \mathbb{R}$ temos:*

1. *Φ_s é uma suspensão estocástica de ϕ_s;*
2. *$X \in \Upsilon,\ \phi_s(X) \in \Upsilon$.*

Lema 64 ([4]) *Seja $\Phi = (\phi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ uma suspensão estocástica de um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos. Então, para todo o $X \in \Lambda$ temos, para todos o $t \in I$ e todo o $s \in R$,*

1. *a aplicação $s \mapsto \mathcal{D}_\mu \Phi_s X(t) \in C^1(\mathbb{R})$;*
2. $\frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{D}_\mu(\phi_s(X))] = \mathcal{D}_\mu\left[\frac{\partial \phi_s(X)}{\partial s}\right]$.

Seja $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I})$ e $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ um difeomorfismo. A imagem de X sob a suspensão estocástica de ϕ, denotada por Φ, induz de modo natural uma aplicação para os vectores tangentes denotada por Φ_*, chamada a aplicação linear tangente, e definida como na geometria diferencial clássica:

Definição 65 *Seja Φ uma suspensão estocástica de um difeomorfismo ϕ tal que a sua k-ésima componente $\phi^{(k)}$ pertence a $\mathcal{T}$. A aplicação linear tangente associada a Φ, e denotada por Φ_*, é definida para todo o $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I})$ por*

$$\Phi_*(X) = T(\Phi(X)) = (\Phi(X), \mathcal{D}(\Phi(X))).$$

Obtém-se então a noção de invariância sob a acção de um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos.

Definição 66 *Seja $\Phi = \{\phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos e seja $L : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(I)$. A funcional L é invariante sob Φ se*

$$L(\phi_* X) = L(X), \text{ para todos o } \phi \in \Phi.$$

Uma consequência da Definição 66, se L é invariante, temos

$$L((\phi_* X); D((\phi_* X))) = L(X; DX);$$

para todo o $s \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{C}^1(I)$.

Estamos em condições de enunciar e demonstrar o teorema de Noether no contexto estocástico.

Teorema 67 *(Teorema de Noether Estocástico) Seja L um Lagrangiano admissível com todas as segundas derivadas limitadas e invariante sob um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos $\Phi = \{\phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$. Seja F_I a funcional associada a L e definida por (3.22) em Ξ. Seja $X \in \Xi \cap L$ de classe $\mathcal{C}^1(I)$ um ponto estacionário de F_I. Então,*

$$\frac{d}{dt} E\left[\partial_v L \cdot \left.\frac{\partial Y}{\partial s}\right|_{s=0}\right] = 0,$$

onde

$$Y_s = \Phi_s(X). \tag{4.2}$$

Demonstração. Seja $Y(s,t) = \phi_s X(t)$ para $s \in \mathbb{R}$ e $a \leq t \leq b$. Se L é invariante sob $\Phi = \{\phi_s\}_{s\in\Re}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial s} L(Y(s,t), \mathcal{D}_\mu Y(s,t)) = 0$$

com $Y(.,t)$ e $\mathcal{D}_\mu Y(.,t) \in C^1(\mathbb{R}), \forall t \in [a,b]$. Temos então

$$\partial_x L . \frac{\partial Y}{\partial s} + \partial_v L . \frac{\partial \mathcal{D}_\mu Y}{\partial s} = 0 \tag{4.3}$$

que é equivalente a

$$\partial_x L . \frac{\partial Y}{\partial s} + \partial_v L . \mathcal{D}_\mu \Big(\frac{\partial Y}{\partial s} \Big) = 0 \tag{4.4}$$

com $X = Y|_{s=0}$ um processo estacionário para F_I. Resulta então que

$$\partial_x L = \mathcal{D}_\mu \partial_v L. \tag{4.5}$$

Como consequência

$$\Big([\mathcal{D}_\mu \partial_v L] . \frac{\partial Y}{\partial s} + \partial_v L . \mathcal{D}_\mu \Big(\frac{\partial Y}{\partial s} \Big) \Big) = 0$$

e então

$$E\Big[\Big([\mathcal{D}_\mu \partial_v L] . \frac{\partial Y}{\partial s} + \partial_v L . \mathcal{D}_\mu \Big(\frac{\partial Y}{\partial s} \Big) \Big) \Big] = 0. \tag{4.6}$$

Usando a regra do produto (3.21), temos

$$\frac{d}{dt} E\Big[\partial_v L \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} |_{s=0} \Big] = 0.$$

■

Capítulo 5

Programação Dinâmica

5.1 Introdução

A *programação dinâmica*, introduzida por Bellman 1957, é uma técnica simples e poderosa para a resolução de problemas de optimização dinâmica. Trabalhos posteriores a este livro, do próprio Bellman e de outros matemáticos, engenheiros e economistas, vem ressaltando a importância teórica do tema e das suas numerosas aplicações. Bertsekas (1985, 1995) (ver [3, 2]) apresenta uma série de problemas que vêm sendo resolvidos via programação dinâmica.

A ideia da solução de um problema de optimização dinâmica pela técnica da programação dinâmica consiste em decompor o problema original numa família de subproblemas. Resolvendo cada subproblema sequencialmente, resolve-se o problema todo. A base teórica desta técnica é o princípio da optimalidade de Bellman.[1]

5.2 Programação Dinâmica: caso discreto

Na programação dinâmica discreta, as decisões devem ser tomadas em estádios ou etapas sequenciais e a resposta, ou a decisão em cada estádio, influencia apenas nas decisões a serem tomadas nos estádios seguintes.

Passamos, de seguida, a abordar a programação dinâmica em tempo discreto nos casos determinístico e estocástico.

[1] *Princípio da optimalidade de Bellman*: a partir de cada ponto, a trajectória óptima restante é optima para o problema que se inicia nesse ponto.

5.2.1 Caso determinístico

Consideramos o problema fundamental da programação dinâmica determinístico em tempo discreto, como

$$\min_{u[0],\cdots,u[N-1]} \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x[k],u[k]) + g_N(x[N])$$
$$sujeito\ a: \begin{cases} x[k+1] = f(x[k],u[k]); \\ k = 0,1,\cdot\cdot\cdot,N-1; \\ x[0] = x_0 \ e/ou\ x[N] = x^*\ dados. \end{cases} \tag{5.1}$$

O objectivo é encontrar a sequência óptima de variáveis de controlo ou de acções de controlo: $\{u^*[0],\cdots,u^*[N-1]\}$ que minimizem a função-objectivo ou função custo do problema

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x[k],u[k]) + g_N(x[N]). \tag{5.2}$$

Denotamos o valor óptimo da função-objectivo por J^*:

$$J^* = \min_{u[0],\cdots,u[N-1]} J. \tag{5.3}$$

Seja $u[i,k] = \{u[i],\cdot\cdot\cdot,u[k]\}$ a sequência de decisão do estádio i até ao estádio k. Consideremos a função-truncada no estádio i, como sendo

$$J_i(x[i],u[i,N-1]) = \sum_{k=i}^{N-1} g_k(x[k],u[k]) + g_N(x[N]). \tag{5.4}$$

É fácil ver que:

$$J_i(x[i],u[i,N-1]) = g_i(x[i],u[i]) + J_{i+1}(x[i+1],u[i+1,N-1]). \tag{5.5}$$

Em particular,

$$J = J_0(x[0],u[0,N-1]), \tag{5.6}$$

cujo valor de J é o definido na equação (5.2). A *função de Bellman* é uma função do estado presente e é definida como sendo o óptimo de cada função-truncada (5.4):

$$V_i(x[i]) = \min_{u[i,N-1]} J_i(x[i],u[i,N-1]). \tag{5.7}$$

Podemos definir a condição de contorno

$$V_N(x[N]) = g_N(x[N]). \tag{5.8}$$

Vamos apresentar o teorema fundamental da programação dinâmica, publicado por Bellman em 1957.

Teorema 68 *Considere o problema de programação dinâmica determinístico com tempo discreto formulado em* (5.1)*. A função de Bellman* (5.7) *é dada pela equação recursiva:*

$$V_i(x[i]) = \min_{u[i]}(g_i(x[i], u[i]) + V_{i+1}(x[i+1])), \tag{5.9}$$

com condição de contorno (5.8)*:*

$$V_N(x[N]) = g_N(x[N]).$$

O valor óptimo da função-objectivo (5.3) *é* $J^* = V_0(x[0])$*.*

Demonstração. Da definição de Bellman (5.7) e da equação recursiva (5.5), temos que:

$$\begin{aligned} V_i(x[i]) &= \min_{u[i,N-1]} J_i(x[i], u[i, N-1]) \\ &= \min_{u[i,N-1]} g_i(x[i], u[i]) + J_{i+1}(x[i+1], u[i+1, N-1]). \end{aligned}$$

Como $u[i+1, N-1]$ não afecta g_i, podemos reescrever:

$$\begin{aligned} V_i(x[i]) &= \min_{u[i]} \Big(g_i(x[i], u[i]) + \min_{u[i+1,N-1]} J_{i+1}(x[i+1], u[i+1, N-1]) \Big) \\ &= \min_{u[i]}(g_i(x[i], u[i]) + V_{i+1}(x[i+1])). \end{aligned}$$

A condição de contorno é a mesma da função de Bellman (5.8). Isto conclui a demonstração da primeira parte do teorema.
Aplicando a relação acima, temos que:

$$V_0(x[0]) = \min_{u[0]} \Big(g_0(x[0], u[0]) + \min_{u[1,N-1]} J_1(x[1], u[1, N-1]) \Big) = J_0(x[0], u[0, N-1]).$$

Das equações (5.6) e (5.3), concluímos que $J^* = V_0(x[0])$. Isto conclui a demostração do teorema. ■

Nota 69 *A equação funcional* (5.9) *é chamada de* equação de Bellman*.*

5.2.2 Caso estocástico

Vamos considerar nesta subsecção a presença da aleatoriedade no sistema dinâmico a ser optimizado via programação dinâmica. Este assunto, muito comum em vários problemas

práticos, é chamado de *programação dinâmica estocástica*.
A equação de estados de um sistema estocástico discreto é dada por

$$x[k+1] = f(x[k], u[k], w[k]). \tag{5.10}$$

Cada $w[k]$ é uma variável aleatória independente para cada estádio do problema discreto no tempo. Dado um horizonte N, a sequência $\{w[0], \cdots, w[N-1]\}$ define um processo estocástico.

O problema fundamental da programação dinâmica estocástica com tempo discreto pode ser formulado da seguinte forma:[2]

$$\begin{aligned} &\min_{u[0],\cdots,u[N-1]} E\left[\sum_{k=0}^{N-1} g_k(x[k], u[k]) + g_N(x[N])\right] \\ &\textit{sujeito a}: \begin{cases} x[k+1] = f(x[k], u[k], w[k]); \\ k = 0, 1, \cdots, N-1; \\ \text{distribuição de cada } w[k] \textit{ dada}; \\ x[0] = x_0 \textit{ e/ou } x[N] = x^* \textit{ dados}. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Neste caso, o estado inicial $x[0]$ também poderia ser estocástico.
Denotamos o valor óptimo da função-objectivo por J^*:

$$J^* = \min_{u[0],\cdots,u[N-1]} E[J]. \tag{5.12}$$

A função truncada no estágio i para o caso estocástico depende do estado presente $x[i]$, da sequência de decisão $u[i, N-1]$ e da sequência de variáveis aleatórias $\{w[i], \cdots, w[N-1]\}$ ou $w[i, N-1]$.

A *função estocástica de Bellman* também pode ser definida como o óptimo da função truncada. Neste ponto-de-vista,

$$V_i(x[i]) = \min_{u[i,N-1]} E[J_i(x[i], u[i, N-1])] \tag{5.13}$$

com condição de contorno dada por

$$V_N(x[N]) = g_N(x[N]). \tag{5.14}$$

[2]Onde queremos encontrar a sequência de acção do controlo que minimize o valor esperado da função-objectivo, sujeito ao sistema dinâmico.

Podemos, por fim, reformular o teorema fundamental da programação dinâmica para o caso estocástico.

Teorema 70 *Considere o problema de programação dinâmica estocástico com tempo discreto formulado em* (5.11)*. A função de Bellman* (5.13) *é dada pela equação recursiva:*

$$V_i(x[i]) = \min_{u[i]} E[(g_i(x[i], u[i]) + V_{i+1}(x[i+1]))],$$

com condição de contorno (5.14)*:*

$$V_N(x[N]) = g_N(x[N]).$$

O valor óptimo da função-objectivo (5.12) *é* $J^* = V_0(x[0])$.

5.3 Programação Dinâmica: caso contínuo

Considere o problema de programação dinâmica determinístico em tempo contínuo formulado da seguinte forma:

$$\begin{gathered}\min_u \int_0^T g(t, x(t), u(t))dt + g_T(x[T]) \\ \textit{sujeito a}: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)); \\ t \in [0, T]; \\ x(0) = x_0 \textit{ e/ou } x(T) = x^* \textit{ dados.} \end{cases}\end{gathered} \tag{5.15}$$

A equação de movimento do problema de tempo contínuo é:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{5.16}$$

Denotamos o valor óptimo da função-objectivo por J^*:

$$J^* = \min_u J. \tag{5.17}$$

Vamos introduzir a seguinte notação: $u(\tau, T)$ corresponde à função de decisão no intervalo fechado $[\tau, T]$. Consideremos a função-truncada como sendo

$$J_\tau(x(\tau), u(\tau, T)) = \int_\tau^T g(s, x(s), u(s))ds + g(T, x(T)). \tag{5.18}$$

Em analogia com o caso discreto, é fácil de ver qual é a *função de Bellman* para o caso contínuo:

$$V_\tau(x(\tau)) = \min_{u(\tau,T)} J_\tau(x(\tau), u(\tau, T)) \tag{5.19}$$

com condição de contorno

$$V_T(x(T)) = g(T, x(T)). \tag{5.20}$$

Teorema 71 *(*Versão para o tempo contínuo do Teorema 68*) Considere o problema de programação dinâmica determinístico em tempo contínuo formulado em* (5.15)*. A função de Bellman* (5.19) *satisfaz a equação*

$$-\frac{\partial V_t(x(t))}{\partial t} = \min_u \Big(g(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V_t(x(t))}{\partial x} f(t, x(t), u(t)) \Big), \tag{5.21}$$

com condição de contorno (5.20)

$$V_T(x(T)) = g(T, x(T)).$$

O valor óptimo da função-objectivo (5.17) *é* $J^* = V_0(x(0))$*.*

Demonstração. Ver [30]. ■

Nota 72 *A equação diferencial parcial* (5.21) *é chamada de* equação de Hamilton-Jacobi-Bellman *ou apenas* equação HJB.

5.4 Integral de Itô

Definição 73 *(Função de classe N) Seja uma função $g : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$. Se*

1. *$g(t, w)$ for $\mathcal{P}_t$-adaptado;*
2. *$E\big[\int_s^T g(t, w)^2 dt\big] < \infty$,*

então g diz-se uma função de classe N e escrevemos $g \in N$.

Definição 74 *(Integral de Itô) Seja g uma função de classe N e $B(t)$ um movimento Browniano de dimensão* 1*. Então o integral de Itô é dado por*

$$I(f, w) = \int_s^T g(t, w) dB_t(w). \tag{5.22}$$

Vamos definir integral estocástico ou processo de Itô.

Definição 75 *Seja B_t um movimento Browniano de dimensão* 1 *em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, seja* $\nu \in N$ $\big($*i.é.,* $P\big(\int_0^t \nu(s,w)^2 ds < \infty, \forall t \geq 0\big) = 1\big)$ *e uma função* μ*. Um integral estocástico de dimensão* 1 *é um processo estocástico* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ *em que* $X(t)$ *tem como domínio* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, com as seguintes representações:*

1. *representação integral*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s,w)ds + \int_0^t \nu(s,w)dB_s; \tag{5.23}$$

2. *representação diferencial*

$$dX(t) = \mu(t,w)dt + \nu(t,w)dB(t). \tag{5.24}$$

Lema 76 (Lema de Itô) *Seja* $X(t)$ *um integral estocástico na sua representação diferencial*

$$dX(t) = \mu dt + \nu dB(t)$$

e seja uma função $g(t,x)$ *continuamente diferenciável em relação aos dois argumentos. Então*

$$Y = \{Y(t) = g(t, X(t)), t \in \mathbb{T}\}$$

é um processo estocástico que verifica

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X(t))(dX(t))^2.$$

Aplicando-se a regra $dt^2 = dtdB(t) = 0$ *e* $dB(t)^2 = dt$ *temos*

$$dY(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t,X(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X(t))\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X(t))\nu^2\right)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X(t))\nu dB(t).$$

5.5 Controlo óptimo estocástico em tempo contínuo

O problema de controlo óptimo de uma equação diferencial estocástica com horizonte finito é o de determinar a função valor, $J(\cdot)$, tal que

$$J(t_0, x_0) = \max_u E_{t_0}\left[\int_0^T f(t,x,u)dt\right] \tag{5.25}$$

sujeito a

$$dx(t) = g(t,x(t),u(t))dt + \sigma(t,x(t),u(t))dB(t) \tag{5.26}$$

dada uma distribuição inicial para a variável de estado $x(0,w) = x_0(w)$ e com as propriedades anteriores para as funções $g(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$. Aplicando-se o princípio de Bellman, obtém-se a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, que nos dá as condições necessárias de optimalidade.

5.5.1 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para um movimento Browniano de dimensão um

Para demonstrar a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, vamos partir da equação (5.25)

$$\begin{aligned} J(t_0, x_0) &= \max_u E_{t_0}\left(\int_{t_0}^T f(t,x,u)dt\right) \\ &= \max_u E_{t_0}\left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t,x,u)dt + \int_{t_0+\Delta t}^T f(t,x,u)dt\right). \end{aligned}$$

Pelo princípio da programação dinâmica, tem-se

$$\begin{aligned} J(t_0, x_0) &= \max_{u, t_0 \leq t_0+\Delta t} E_{t_0}\left[\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t,x,u)dt + \max_{u, t_0 \leq t_0+\Delta t}\Big(\int_{t_0+\Delta t}^T f(t,x,u)dt\Big)\right] \\ &= \max_{u, t_0 \leq t_0+\Delta t} E_{t_0}[f(t,x,u)\Delta t + J(t_0+\Delta t, x_0+\Delta x)] \end{aligned}$$

fazendo $x(t_0+\Delta t) = x_0 + \Delta x$. Se J for continuamente diferenciável até à segunda ordem, podemos aplicar o Lema 76, obtendo-se, para cada t

$$J(t+\Delta t, x+\Delta x) = J(t,x) + J_t(t,x)\Delta t + J_x(t,x)\Delta x + \frac{1}{2}J_{xx}(t,x)(\Delta x)^2 \tag{5.27}$$

em que

$$\begin{aligned} \Delta x &= g\Delta t + \sigma \Delta B \\ (\Delta x)^2 &= g^2(\Delta t)^2 + 2g\sigma(\Delta t)(\Delta B) + \sigma^2(\Delta B)^2 = \sigma^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Assim,

$$J = \max_u E\Big[f\Delta t + J + J_t\Delta t + J_x g\Delta t + J_x\sigma\Delta B + \frac{1}{2}\sigma^2 J_{xx}\Delta t\Big]$$
$$= \max_u \Big[f\Delta t + J + J_t\Delta t + J_x g\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 J_{xx}\Delta t\Big]$$

porque $E_0(dB) = 0$. Tomando $\Delta \to 0$, obtemos a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$-\frac{\partial J(t,x)}{\partial t} = \max_u \Big(f(t,x,u) + g(t,x,u)\frac{\partial j(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma(t,x,u)^2\frac{\partial^2 J(t,x)}{\partial x^2}\Big), \tag{5.28}$$

que é uma equação diferencial parcial, em geral não linear.

5.5.2 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para um movimento Browniano de dimensão m

Vamos supor que o estado de um sistema no tempo t é descrito por um processo X_t de Itô da seguinte forma:

$$dX_t = dX_t^u = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t \tag{5.29}$$

onde $X_t \in \mathbb{R}^n,\ b : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^n,\ \sigma : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^{n\times m}\ e\ B_t$ é um movimento Browniano de dimensão m. Aqui $u \in U$ é um parâmetro cujo valor podemos escolher num determinado conjunto Borel U, em qualquer instante t, a fim de controlar o processo X_t. Portanto $u_t = u(t, w)$ é um processo estocástico. A nossa decisão no tempo t deve basear-se no que aconteceu até esse instante, a função $w \to u(t, w)$ deve (pelo menos) ser mensurável em relação a $\mathcal{F}_t^m$, isto é, o processo u_t deve ser $\mathcal{F}_t^{(m)}$-adaptado.

Seja $\{X_h^{s,x}\}_{h\geq s}$ uma solução de (5.29) tal que $X_s^{s,x} = x$, isto é,

$$X_h^{s,x} = x + \int_s^h b(r, X_r^{s,x}, u_r)dr + \int_s^h \sigma(r, X_r^{s,x}, u_r)dB_r;\ h \geq s.$$

Denotamos por $Q^{s,x}$ a lei de probabilidade associada a X_t,

$$Q^{s,x}[X_{t_1} \in F_1, \ldots, X_{t_k} \in F_k] = P^0[X_{t_1}^{s,x} \in F_1, \ldots, X_{t_k}^{s,x} \in F_k] \tag{5.30}$$

para $s \leq t_i,\ F_i \subset \mathbb{R}^n;\ 1 \leq i \leq k,\ k = 1, 2, \ldots$

Sejam $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}$ e $K : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções contínuas, seja G um domínio fixo em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e seja $\widehat{T}$ um tempo após a primeira saída s de G para o processo $\{X_r^{s,x}\}_{r\geq s}$, isto é,

$$\widehat{T} = \widehat{T}^{s,x}(w) = \inf\{r > s; (r, X_r^{s,x}(w)) \notin G\} \leq \infty. \tag{5.31}$$

Suponhamos

$$E^{s,x}\left[\int_s^{\widehat{T}} |F^{u_r}(r, X_r)|dr + |K(\widehat{T}, X_{\widehat{T}})|\chi_{\{\widehat{T}<\infty\}}\right] < \infty \; para \; todos \; os \; s, x, u \tag{5.32}$$

onde $F^u(r, z) = F(r, z, u)$. Vamos definir a funcional $J^u(s, x)$ por

$$J^u(s, x) = E^{s,x}\left[\int_s^{\widehat{T}} |F^{u_r}(r, X_r)|dr + |K(\widehat{T}, X_{\widehat{T}})|\chi_{\{\widehat{T}<\infty\}}\right] \tag{5.33}$$

e introduzir

$$Y_t = (s + t, X_{s+t}^{s,x}) \; para \; t \geq 0, Y_0 = (s, x).$$

Ao substituir em (5.29) vamos ter

$$dY_t = dY_t^u = b(Y_t, u_t)dt + \sigma(Y_t, u_t)dB_t, \tag{5.34}$$

onde a lei de probabilidade de Y_t começando em $y = (s, x)$ para $t = 0$ é Q^y. A funcional (5.33) escrita em termos de Y com $y = (s, x)$ é dada por

$$J^u(y) = E^y\left[\int_s^T |F^{u_t}(Y_t)|dt + |K(Y_T)|\chi_{\{T<\infty\}}\right], \tag{5.35}$$

onde $T = \inf\{t > 0; Y_t \notin G\} = \widehat{T} - s$ e além disso $K(\widehat{T}, X_{\widehat{T}}) = K(Y_{\widehat{T}-s}) = K(Y_T)$.

Para cada $y \in G$ o problema consiste em encontrar o número $\Phi(y)$ e o controlo $u^* = u^*(t, w) = u^*(y, t, w)$ tal que

$$\Phi(y) := \sup_{u(t,w)} J^u(y) = J^{u^*}(y), \tag{5.36}$$

onde o supremo é tomado sobre todo o processo $\{u_t\}$ $\mathcal{F}_t^{(m)}$-adaptado com valor em U. O controlo u^*, se existir, é chamado de controlo óptimo e Φ é chamado de desempenho óptimo ou o valor óptimo da funcional.

Vamos considerar aqui controlos

$$u = u(t, X_t(w))$$

no sentido de Markov. Para exemplos de outras funções de controlo ver [31].

Introduzindo $Y_t = (s + t, X_{s+t})$ (como explicado anteriormente), o sistema torna-se na equação

$$dY_t = b(Y_t, u(Y_t))dt + \sigma(Y_t, u(Y_t))dB_t. \tag{5.37}$$

Para $v \in U$ e $f \in C_0^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ vamos definir o operador

$$(L^v f)(y) = \frac{\partial f}{\partial s}(y) + \sum_{i=1}^{n} b_i(y,v)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y,v)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{5.38}$$

onde $a_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma\sigma^T)_{ij}$, $y = (s,x)$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Para cada escolha da função u a solução $Y_t = Y_t^u$ é uma difusão de Itô com gerador A dado por

$$(Af)(y) = (L^{u(y)}f)(y) \text{ para } f \in C_0^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Para $v \in U$ definimos $F^v(y) = F(y,v)$. O primeiro resultado fundamental da teoria do controlo estocástico é o seguinte:

Teorema 77 (Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) (I) [31]) *Seja*

$$\Phi(y) = \sup\{J^u(y); u = u(Y) \text{ é controlo de Markov}\}.$$

Suponhamos que $\Phi \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ *satisfaz*

$$E^y\left[|\Phi(Y_\alpha)| + \int_0^\alpha |L^v\Phi(Y_t)|dt\right] < \infty$$

para todos os tempos de paragem $\alpha \leq T$, *todos* $y \in G$ *e todos* $v \in U$. *Além disso, suponhamos que* $T < \infty$ *em* Q^y *para todos os* $y \in G$ *e que o controlo óptimo de Markov* u^* *existe. Suponhamos ainda que* ∂G *é regular para* Y_t^{u*}. *Então,*

$$\Phi(y) = K(y) \forall y \in \partial G \tag{5.39}$$

e o supremo

$$\sup_{v \in U}\{F^v(y) + (L^v\Phi)(y)\} \ \forall y \in G \tag{5.40}$$

é obtido se $v = u^*(y)$, *onde* $u^*(y)$ *é óptimo. Por outras palavras,*

$$F(y, u^*(y)) + (L^{u^*(y)}\Phi)(y) = 0 \ \forall y \in G. \tag{5.41}$$

Demonstração. Ver [31]. ■

A equação de HJB(I) afirma que se um controlo optimal u^* existir, então nós sabemos que o seu valor v no ponto y é um ponto onde a função

$$v \to F^v(y) + (L^v\Phi)(y); \ v \in U$$

atinge o seu máximo (e esse valor máximo é 0). Assim o problema do controlo estocástico original está associado ao problema mais fácil de encontrar o máximo de uma função real em $U \in \mathbb{R}^k$. Entretanto a equação de HJB(I) apenas afirma que é necessário que $v = u^*(y)$ seja o valor máximo dessa função. É importante saber se isso também é suficiente: se em cada ponto y encontrámos $v = u_0(y)$ tal que $F^v(y) + (L^v\Phi)(y)$ é máximo e esse máximo é de 0, será que u_0 vai ser um controlo óptimo? O próximo resultado afirma que (sob certas condições) este é, na verdade, o caso.

Teorema 78 (Equação de HJB (II)) *Seja ϕ uma função em $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ tal que, para qualquer $v \in U$,*

$$F^v(y) + (L^v\Phi)(y) \leq 0; \; y \in G \tag{5.42}$$

com

$$\lim_{t \to T} \phi(Y_t) = K(Y_T).\chi_{T<\infty} \text{ em } Q^y \tag{5.43}$$

e tal que

$$\{\phi(Y_\tau)\}_{\tau \leq T} \tag{5.44}$$

é uniformemente Q^y-integrável para todos os controlos de Markov u e todos os $y \in G$. Então

$$\phi(y) \geq J^u(y) \tag{5.45}$$

para todos os controlos de Markov u e todos os $y \in G$. Além disso, se para cada $y \in G$ temos $u_0(y)$ tal que

$$F^{u_o(y)}(y) + (L^{u_0(y)}\Phi)(y) = 0 \tag{5.46}$$

então $u_0 = u_0(y)$ é um controlo de Markov tal que

$$\phi(y) = J^{u_0}(y),$$

ou seja, u_0 é um controlo óptimo e $\phi(y) = \Phi(y)$.

Demonstração. Ver [31]. ■

As equações de HJB (I) e (II) fornecem uma muito agradável solução para o problema do controlo estocástico no caso em que apenas são considerados controlos de Markov. Pode-se considerar que a restrição a controlos de Markov é demasiado restritiva, mas felizmente pode-se obter sempre o mesmo desempenho com um controlo de Markov que com um controlo $\mathcal{F}$- adaptado arbitrário. Pelo menos, se algumas condições adicionais forem satisfeitas (ver [31, Teorema 11.2.3, pág. 232]), podemos afirmar que o problema tem o mesmo valor óptimo para as duas classes de controlos.

Nota 79 *A teoria acima também se aplica ao problema mínimo correspondente:*

$$\Psi(y) = \inf_u J^u(y) = J^{u^*}. \tag{5.47}$$

Para isso, notamos que

$$\Psi(y) = \sup_u \{-J^u(y)\} = \sup_u \Big\{ E^y \Big[\int_0^T -F^u(Y_t)dt - K(Y_t) \Big] \Big\}.$$

Conclusão

Ao longo desta dissertação de Mestrado estudámos problemas determinísticos e estocásticos do cálculo das variações e controlo óptimo. Em particular, obtivemos formulações determinísticas e estocásticas para o Teorema de Noether.

Para estudar o Teorema de Noether é indispensável conhecer o Cálculo das Variações e o Controlo Óptimo. No primeiro capítulo estudamos os conteúdos mais importantes do Cálculo das Variações: o problema fundamental do Cálculo das Variações, a equação de Euler-Lagrange e a definição de extremal. Depois abordamos o Controlo Óptimo: o problema fundamental do Controlo Óptimo, o Princípio do Máximo de Pontryagin e a definição de extremal de Pontryagin. No segundo capítulo tratamos do Teorema de Noether. Abordamos as leis de conservações (lei de conservação de energia e momento) e formulamos o Teorema de Noether para o Cálculo das Variações e para o Controlo Óptimo. No terceiro e quarto capítulo abordamos o Cálculo das Variações Estocástico e o Teorema de Noether Estocástico, tendo em conta a abordagem feita por Cresson e Darses [5]. No quinto capítulo estudamos a Programação Dinâmica (caso discreto e contínuo) numa abordagem determinística e estocástica. No estudo do controlo óptimo estocástico fizemos uma abordagem utilizando a programação dinâmica. Estudámos a programação dinâmica estocástica em tempo discreto e contínuo, obtendo diferentes formulações da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Além da abordagem de Cresson e Darses [5], adoptada neste trabalho, existem ainda outras abordagens, como a do Zambrini [39] que em 1980 apresentou duas extensões do teorema fundamental do cálculo das variações estocástico, que são necessárias para os problemas da física que envolvem restrições. Podemos encontrar estudos do Zambrini sobre o tema em [40, 1].

Enquanto no nosso trabalho usamos distribuições normais, Ortega e Lázaro-Camí [25], utilizando ferramentas da análise global estocástica introduzidas por Meyer e Schwartz, obtiveram uma generalização estocástica das equações de Hamilton para distribuições de Poisson.

Recentemente [6, 7], foi demonstrado que as equações de Navier-Stokes e as equações de Stokes admitem uma estrutura Lagrangeana com a incorporação de sistemas estocásticos Lagrangeanos. Estas equações coincidem com as extremais de uma dada funcional estocástica no sentido considerado neste trabalho.

A noção de invariância sob um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos usada neste trabalho,

$$L((\phi_* X); \mathcal{D}((\phi_* X))) = L(X; \mathcal{D}X),$$

foi adoptada de Cresson e Darses, não coincidindo com a noção definido por Yasue [4]. A noção de invariância apresentada por Yasue implica uma variação do processo X e da derivada de X:

$$L(\phi_*(X); \phi_*(\mathcal{D}X)) = L(X; \mathcal{D}X)$$

para todo o $s \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{C}^1(I)$.

O Teorema de Noether estocástico apresentado neste trabalho é apenas para o caso autónomo. O teorema de Noether estocástico para o caso não autónomo, com mudança da variável independente t, é um problema em aberto e um bom tema para futuras investigações.

Bibliografia

[1] Albeverio, S.; Rezende, J.; Zambrini, J.-C. Probability and quantum symmetries. II. The theorem of Noether in quantum mechanics. J. Math. Phys. 47 (2006), no. 6, 062107, 61 pp.

[2] Bertsekas, Dimitri *P. Dynamic programming and optimal control.* Vol. II Second edition. Athena Scientific, Belmont, MA, 2001.

[3] Bertsekas, Dimitri *P. Dynamic programming and optimal control.* Vol. I third edition. Athena Scientific, Belmont, MA, 2005.

[4] Cresson, Jacky; Darses, Sébastien. Plongement stochastique des systèmes lagrangiens. (French) [Stochastic embedding of Lagrangian systems] C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342 (2006), no. 5, 333–336.

[5] J. Cresson e S. Darses *Stochastic Embedding of Dynamical Systems*, J. Math. Phys. 48 (2007), no. 7, 072703, 54 pp.

[6] J. Cresson e S. Darses *Lagrangian Structures for the Stokes, Navier-Stokes and Euler Equations*, arXiv:0811.3286v1 [math.AP], 20 Nov 2008.

[7] Cresson, Jacky; Frederico, Gastão S. F.; Torres, Delfim F. M. Constants of motion for non-differentiable quantum variational problems. Topol. Methods Nonlinear Anal. 33 (2009), no. 2, 217–231.

[8] G. S. F. Frederico *Generalizações do Teorema de Noether no Cálculo das Variações e Controlo Óptimo* Dissertação Doutoramento, Universidade de Cabo Verde, 2009.

[9] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Nonconservative Noether's theorem in Optimal Control*, conference Proceedings of the 13th IFAC Workshop on "Control Applications of Opimization"(CAO'06), Paris-Cachan, France, April (2006), 127–132.

[10] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *The Noether's principle and fractional differentiation*, 2nd Podlasie Conference of Mathematics (Druga Podlaska Konferencja Matematyczna), 21 and 22 April 2006, University of Mathematics and Applied Computer Science, Białystok, Poland.

[11] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Noether's theorem for fractional optimal control problems*, Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, 19-21 July 2006, Porto, pp. 142–147.

[12] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Constants of motion for fractional action-like variational problems*. Int. J. Appl. Math., **19**(1) (2006), 97–104.

[13] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Nonconservative Noether's theorem in optimal control*, Int. J. Tomogr. Stat., **5**(W07) (2007), 109–114.

[14] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations*, J. Math. Anal. Appl., **334** (2007), 834–846.

[15] G. S. F. Frederico and D. F. M. Torres. *Non-conservative Noether's theorem for fractional action-like variational problems with intrinsic and observer times*, Journées Internationales de Mathématiques Appliquées (International Days of Applied Mathematics), MATE'07, 11 et 12 Mai 2007, Tangier, Marroc.

[16] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. Conservation laws for invariant functionals containing compositions. Appl. Anal. 86 (2007), no. 9, 1117–1126.

[17] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Constants of motion for non-differentiable quantum variational problems*, Fifth Symposium on Nonlinear Analysis (SNA'2007), Torun, Poland, 10-14 September (2007).

[18] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Necessary optimality conditions for fractional action-like problems with intrinsic and observer times, WSEAS Transactions on Mathematics*, In Special Issue: Nonclassical Lagrangian Dynamics and Potential Maps (Guest Editor: Constantin Udriste), Issue 1, Vol. 7, 2008, 6–11.

[19] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Non-conservative Noether's theorem for fractional action-like variational problems with intrinsic and observer times*, Int. J. Ecol. Econ. Stat., Vol. 9, Nr. F07, 2007, 74–82.

[20] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Conservations laws for invariant functionals containing compositions*, Applicable Anal., **86**(9) (2007), 1117–1126.

[21] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Fractional conservation laws in optimal control theory*, Nonlinear Dynam., Vol. 53, Nr. 3, 2008, 215–222.

[22] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres. *Fractional optimal control in the sense of Caputo and the fractional Noether's theorem*, Vol. 3, Nr. 10, 2008, 479–493.

[23] P. D. F. Gouveia, D. F. M. Torres. *Automatic computation of conservation laws in the calculus of variations and optimal control*, Comput. Methods Appl. Math., **5**(4) (2005), 387–409.

[24] P. D. F. Gouveia, D. F. M. Torres, E. A. M. Rocha. *Symbolic computation of variational symmetries in optimal control*, Control and Cybernetics **35**(4) (2006) 831–849.

[25] Lázaro-Camí, Joan-Andreu; Ortega, Juan-Pablo. Stochastic Hamiltonian dynamical systems. Rep. Math. Phys. 61 (2008), no. 1, 65–122

[26] Lázaro-Camí, Joan-Andreu; Ortega, Juan-Pablo. Reduction, reconstruction, and skew-product decomposition of symmetric stochastic differential equations. Stoch. Dyn. 9 (2009), no. 1, 1–46.

[27] E. Nelson *Dynamical Theories of Broenian Motin* Copyright c 1967, by Princeton University Press. All rights reserved. Second edition, August 2001. Posted on the Web at http://www.math.princeton.edu/ nelson/books.html

[28] E. Noether. *Invariante variationsprobleme*, Gött. Nachr., (1918), 235–257.

[29] E. Noether. *Invariant variation problems*, Transport Theory Statist. Phys., **3** (1) (1971), 186–207, (English translation of [28]).

[30] R. T. Nogueira Cardoso *Ferramentas para Programação Dinâmica em Malha Aberta* Dissertação Doutoramento, Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

[31] B. Oksendal *Stohastic Differential Equations* An Introduction with Applications Fifth Edition, Corrected Printing Springer-Verlag Heidelberg New York, 2003.

[32] L. S. Pontryangin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, Mischenko. *A Teoria Matemática de Processos Óptimos* (em Russo, em 1958, e em Inglês, em 1962).

[33] D. F. M. Torres *Cálculo das Variações* Aulas de Mestrado em Matemática Aplicada em Engenharia-UNICV, 2007.

[34] D. F. M. Torres. *Conservation laws in optimal control*, Dynamics, bifurcations, and control (Kloster Irsee, 2001), 287–296, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 273, Springer, Berlin, 2002.

[35] D. F. M. Torres. *On the Noether theorem for optimal control*, Eur. J. Control, **8**(1) (2002), 56–63.

[36] D. F. M. Torres. *Quasi-invariant optimal control problems*, Port. Math. (N.S.), **61**(1) (2004), 97–114.

[37] D. F. M. Torres. *Proper extensions of Noether's symmetry theorem for nonsmooth extremals of the calculus of variations*, Commun. Pure Appl. Anal., **3**(3) (2004), 491–500.

[38] I. F. Wilde *Stochastic Analysis Notes*, 2009.

[39] Zambrini, J.-C. *Stochastic variational problems with constraints.* Lett. Math. Phys. 4 (1980), no. 6, 457–463.

[40] Zambrini, J.-C. *Maupertuis' principle of least action in stochastic calculus of variations.* J. Math. Phys. 25 (1984), no. 5, 1314–1322.

Índice

Cálculo das Variações, 6
Condição necessária e suficiente de invariância, 27
Condição Suficiente de Jacobi, 12

derivadas de Nelson, 29
derivadas estocásticas, 29

Equação de Euler-Lagrange Estocástica, 37
Equação de HJB (II), 54

Função Diferenciável e Processo Crítico, 36

geradores infinitesimais, 27

Invariância, 26

Lema fundamental do cálculo das variações, 8

multiplicadores de Lagrange, 26

Nelson diferenciável, 29

primeiro integral, 27
Programação Dinâmica, 43

Teorema de Noether Estocástico, 40
transformações infinitesimais, 26

um movimento Browniano, 29